

第5章 | 積分法とその応用



第1節 不定積分

1 不定積分とその基本性質

まとめ

1 原始関数

x で微分すると $f(x)$ になる関数があれば、その関数を $f(x)$ の 原始関数 といい、それは無数にある。

2 不定積分

関数 $f(x)$ の原始関数の1つを $F(x)$ とすると、 $f(x)$ の原始関数全体は、 $F(x)+C$ の形に書き表される。 C は任意の定数である。

この表示を $f(x)$ の 不定積分 といい、 $\int f(x) dx$ で表す。

$f(x)$ の不定積分を求めることを、 $f(x)$ を x で積分する または単に 積分する といい、上の定数 C を 積分定数 という。また、 $f(x)$ を 被積分関数 といい、 x を 積分変数 という。

注意 不定積分と原始関数を区別せずに同じ意味で用いることもある。

3 $f(x)$ の不定積分

$F'(x)=f(x)$ のとき、 $f(x)$ の不定積分は

$$\int f(x) dx = F(x) + C \quad \text{ただし、} C \text{ は積分定数}$$

注意 今後は「 C は積分定数」という断りを省略する。

4 x^α の不定積分

$$\int x^\alpha dx = \frac{1}{\alpha+1} x^{\alpha+1} + C \quad \text{ただし、} \alpha \neq -1$$

$$\leftarrow (x^{\alpha+1})' = (\alpha+1)x^\alpha$$

$$\int \frac{1}{x} dx = \log|x| + C$$

$$\leftarrow (\log|x|)' = \frac{1}{x}$$

5 関数の定数倍および和、差の不定積分

$$\text{① } \int k f(x) dx = k \int f(x) dx \quad \text{ただし、} k \text{ は定数}$$

$$\text{② } \int \{f(x) + g(x)\} dx = \int f(x) dx + \int g(x) dx$$

$$\text{③ } \int \{f(x) - g(x)\} dx = \int f(x) dx - \int g(x) dx$$

6 三角関数, 指数関数の不定積分

a は 1 でない正の定数とする。

$$\int \sin x dx = -\cos x + C, \quad \int \cos x dx = \sin x + C$$

$$\int \frac{dx}{\cos^2 x} = \tan x + C, \quad \int \frac{dx}{\sin^2 x} = -\frac{1}{\tan x} + C$$

$$\int e^x dx = e^x + C, \quad \int a^x dx = \frac{a^x}{\log a} + C$$

A 不定積分

教 p.139

練習
1

次の不定積分を求めよ。

$$(1) \int \frac{dx}{x^3}$$

$$(2) \int x^{\frac{1}{3}} dx$$

$$(3) \int x\sqrt{x} dx$$

$$(4) \int \frac{dx}{\sqrt{x}}$$

指針 x^a の不定積分 被積分関数を x^a の形に表して, 公式を適用する。

解答 (1) $\int \frac{dx}{x^3} = \int x^{-3} dx = \frac{1}{-3+1} x^{-3+1} + C = -\frac{1}{2} x^{-2} + C = -\frac{1}{2x^2} + C$ 答

$$(2) \int x^{\frac{1}{3}} dx = \frac{1}{\frac{1}{3}+1} x^{\frac{1}{3}+1} + C = \frac{3}{4} x^{\frac{4}{3}} + C$$
 答

$$(3) \int x\sqrt{x} dx = \int x^{\frac{3}{2}} dx = \frac{1}{\frac{3}{2}+1} x^{\frac{3}{2}+1} + C = \frac{2}{5} x^{\frac{5}{2}} + C$$

$$= \frac{2}{5} x^2 \sqrt{x} + C$$
 答

$$(4) \int \frac{dx}{\sqrt{x}} = \int x^{-\frac{1}{2}} dx = \frac{1}{-\frac{1}{2}+1} x^{-\frac{1}{2}+1} + C = 2x^{\frac{1}{2}} + C$$

$$= 2\sqrt{x} + C$$
 答

B 不定積分の基本性質

教 p.140

練習
2

次の不定積分を求めよ。

$$(1) \int \frac{x^2 - 4x + 1}{x^3} dx$$

$$(2) \int \frac{x+2}{\sqrt{x}} dx$$

$$(3) \int \frac{(\sqrt{y}-1)^2}{y} dy$$

$$(4) \int \left(3t^2 - \frac{1}{t}\right)^2 dt$$

5 章

積分法とその応用

指針 和・差の不定積分 被積分関数を x^α の形の項に分け、各項ごとに

$$\int x^\alpha dx = \frac{1}{\alpha+1} x^{\alpha+1} + C \quad (\alpha \neq -1), \quad \int \frac{1}{x} dx = \log|x| + C$$

を利用して不定積分を求めればよい。(3), (4) はまず展開する。

解答 (1) $\int \frac{x^2-4x+1}{x^3} dx = \int \left(\frac{1}{x} - \frac{4}{x^2} + \frac{1}{x^3} \right) dx = \int \frac{dx}{x} - 4 \int \frac{dx}{x^2} + \int \frac{dx}{x^3}$

$$= \log|x| - 4 \int x^{-2} dx + \int x^{-3} dx$$

$$= \log|x| - 4 \cdot \frac{1}{-2+1} x^{-2+1} + \frac{1}{-3+1} x^{-3+1} + C$$

$$= \log|x| + \frac{4}{x} - \frac{1}{2x^2} + C \quad \boxed{\text{答}}$$

(2) $\int \frac{x+2}{\sqrt{x}} dx = \int \left(\sqrt{x} + \frac{2}{\sqrt{x}} \right) dx = \int x^{\frac{1}{2}} dx + 2 \int x^{-\frac{1}{2}} dx$

$$= \frac{1}{\frac{1}{2}+1} x^{\frac{1}{2}+1} + 2 \cdot \frac{1}{-\frac{1}{2}+1} x^{-\frac{1}{2}+1} + C$$

$$= \frac{2}{3} x\sqrt{x} + 4\sqrt{x} + C \quad \boxed{\text{答}}$$

(3) $\int \frac{(\sqrt{y}-1)^2}{y} dy = \int \frac{y-2\sqrt{y}+1}{y} dy = \int \left(1 - \frac{2}{\sqrt{y}} + \frac{1}{y} \right) dy$ ← 積分変数 y

$$= \int dy - 2 \int y^{-\frac{1}{2}} dy + \int \frac{dy}{y}$$

$$= y - 2 \cdot \frac{1}{-\frac{1}{2}+1} y^{-\frac{1}{2}+1} + \log|y| + C$$

$$= y - 4\sqrt{y} + \log y + C \quad \boxed{\text{答}}$$

(4) $\int \left(3t^2 - \frac{1}{t} \right)^2 dt = \int \left(9t^4 - 6t + \frac{1}{t^2} \right) dt$ ← 積分変数 t

$$= 9 \int t^4 dt - 6 \int t dt + \int t^{-2} dt$$

$$= 9 \cdot \frac{1}{4+1} t^{4+1} - 6 \cdot \frac{1}{1+1} t^{1+1} + \frac{1}{-2+1} t^{-2+1} + C$$

$$= \frac{9}{5} t^5 - 3t^2 - \frac{1}{t} + C \quad \boxed{\text{答}}$$

注意 (3) 被積分関数の定義域は $y > 0$ であるから、 $\log|y|$ は $\log y$ としてよい。

C 三角関数, 指数関数の不定積分

教 p.141

練習
3

次の不定積分を求めよ。

(1) $\int (\cos x - 2 \sin x) dx$ (2) $\int \frac{2 \cos^3 x - 1}{\cos^2 x} dx$

(3) $\int \frac{dx}{\tan^2 x}$ (4) $\int 5^x dx$ (5) $\int (3^x - 2e^x) dx$

指針 三角関数, 指数関数の不定積分 不定積分の基本性質を利用する。

(1)~(3) 被積分関数が $\sin x$, $\cos x$, $\frac{1}{\cos^2 x}$, $\frac{1}{\sin^2 x}$ のいずれかの積分になるように変形し, それぞれの不定積分の公式を利用する。

解答 (1) $\int (\cos x - 2 \sin x) dx = \int \cos x dx - 2 \int \sin x dx$
 $= \sin x + 2 \cos x + C$ 答

(2) $\int \frac{2 \cos^3 x - 1}{\cos^2 x} dx = \int \left(2 \cos x - \frac{1}{\cos^2 x} \right) dx$
 $= 2 \int \cos x dx - \int \frac{dx}{\cos^2 x}$
 $= 2 \sin x - \tan x + C$ 答

(3) $\int \frac{dx}{\tan^2 x} = \int \frac{\cos^2 x}{\sin^2 x} dx$
 $= \int \frac{1 - \sin^2 x}{\sin^2 x} dx = \int \left(\frac{1}{\sin^2 x} - 1 \right) dx$
 $= \int \frac{dx}{\sin^2 x} - \int dx = -\frac{1}{\tan x} - x + C$ 答

(4) $\int 5^x dx = \frac{5^x}{\log 5} + C$ 答

(5) $\int (3^x - 2e^x) dx = \int 3^x dx - 2 \int e^x dx$
 $= \frac{3^x}{\log 3} - 2e^x + C$ 答

不定積分の公式は
確実に覚えよう。

5
章

積分法とその応用

2 置換積分法と部分積分法

まとめ

1 $f(ax+b)$ の不定積分 $F'(x)=f(x)$, $a \neq 0$ とするとき

$$\int f(ax+b) dx = \frac{1}{a} F(ax+b) + C$$

2 置換積分法(1)

$$\text{① } \int f(x) dx = \int f(g(t))g'(t) dt \quad \text{ただし, } x=g(t)$$

3 置換積分法(2)

$$\text{② } \int f(g(x))g'(x) dx = \int f(u) du \quad \text{ただし, } g(x)=u$$

注意 $g'(x) = \frac{du}{dx}$ を形式的に $g'(x) dx = du$ と書き表すと、公式が使いやすい。

4 $\frac{g'(x)}{g(x)}$ の不定積分

$$\text{③ } \int \frac{g'(x)}{g(x)} dx = \log|g(x)| + C$$

注意 公式② $\int f(g(x))g'(x) dx = \int f(u) du$ で、 $f(u) = \frac{1}{u}$ の場合である。

5 部分積分法

積の導関数の公式 $\{f(x)g(x)\}' = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$ より、 $f(x)g(x)$ は右辺の関数の原始関数であるから

$$f(x)g(x) = \int f'(x)g(x) dx + \int f(x)g'(x) dx$$

これにより、次の公式が成り立つ。

$$\text{④ } \int f(x)g'(x) dx = f(x)g(x) - \int f'(x)g(x) dx$$

A $f(ax+b)$ の不定積分

教 p.142

練習
4

次の不定積分を求めよ。

$$(1) \int (3x+1)^4 dx \quad (2) \int (4x-3)^{-3} dx \quad (3) \int \frac{dx}{\sqrt{1-2x}}$$

$$(4) \int \frac{dx}{2x+1} \quad (5) \int \sin 2x dx \quad (6) \int e^{3x-1} dx$$

指針 $f(ax+b)$ の不定積分 被積分関数は $ax+b$ との合成関数である。ここでは

$f(ax+b)$ の不定積分の公式を適用して不定積分を求める。公式は、 a の逆数を掛ければ、 $ax+b$ を1つの文字とみなして、これまでの不定積分の公式がそのまま利用できることを示している。

(3) $(ax+b)^a$ の形に変形する。

解答 (1) $\int (3x+1)^4 dx = \frac{1}{3} \cdot \frac{(3x+1)^{4+1}}{4+1} + C = \frac{1}{15} (3x+1)^5 + C$ 答

(2) $\int (4x-3)^{-3} dx = \frac{1}{4} \cdot \frac{(4x-3)^{-3+1}}{-3+1} + C = -\frac{1}{8} (4x-3)^{-2} + C$ 答

(3) $\int \frac{dx}{\sqrt{1-2x}} = \int (1-2x)^{-\frac{1}{2}} dx = -\frac{1}{2} \cdot \frac{(1-2x)^{-\frac{1}{2}+1}}{-\frac{1}{2}+1} + C$
 $= -(1-2x)^{\frac{1}{2}} + C = -\sqrt{1-2x} + C$ 答

(4) $\int \frac{dx}{2x+1} = \frac{1}{2} \log|2x+1| + C$ 答

(5) $\int \sin 2x dx = \frac{1}{2} \cdot (-\cos 2x) + C = -\frac{1}{2} \cos 2x + C$ 答

(6) $\int e^{3x-1} dx = \frac{1}{3} e^{3x-1} + C$ 答

B 置換積分法

教 p.143



教科書の例題1の不定積分を、 $x+1=t$ とおいて求めてみよう。

解答 $x+1=t$ とおくと $x=t-1, dx=dt$

$\leftarrow \frac{dx}{dt}=1$

$$\begin{aligned} \int x\sqrt{x+1} dx &= \int (t-1)\sqrt{t} dt = \int \left(t^{\frac{3}{2}} - t^{\frac{1}{2}}\right) dt \\ &= \frac{2}{5} t^{\frac{5}{2}} - \frac{2}{3} t^{\frac{3}{2}} + C \\ &= \frac{2}{15} t^{\frac{3}{2}} (3t-5) + C \\ &= \frac{2}{15} (x+1)^{\frac{3}{2}} \{3(x+1)-5\} + C \\ &= \frac{2}{15} (3x-2)(x+1)\sqrt{x+1} + C \quad \text{答} \end{aligned}$$

置換の仕方は1通りではないよ。



練習
5

次の不定積分を求めよ。

(1) $\int x\sqrt{2x-1} dx$

(2) $\int \frac{x}{\sqrt{x+1}} dx$

指針 置換積分法(1)

(1) $\sqrt{2x-1}=t$ とおく。

(2) $\sqrt{x+1}=t$ とおく。

解答 (1) $\sqrt{2x-1}=t$ とおく

$$x = \frac{t^2+1}{2}, \quad dx = t dt$$

$$\leftarrow \frac{dx}{dt} = t$$

$$\begin{aligned}
 \int x\sqrt{2x-1} dx &= \int \frac{t^2+1}{2} \cdot t \cdot t dt \\
 &= \frac{1}{2} \int (t^4 + t^2) dt = \frac{1}{2} \left(\frac{t^5}{5} + \frac{t^3}{3} \right) + C \\
 &= \frac{1}{30} t^3 (3t^2 + 5) + C \\
 &= \frac{1}{30} (\sqrt{2x-1})^3 \{3(2x-1) + 5\} + C \\
 &= \frac{1}{15} (3x+1)(2x-1)\sqrt{2x-1} + C \quad \text{答}
 \end{aligned}$$

(2) $\sqrt{x+1}=t$ とおく

$$x = t^2 - 1, \quad dx = 2t dt$$

$$\leftarrow \frac{dx}{dt} = 2t$$

$$\begin{aligned}
 \int \frac{x}{\sqrt{x+1}} dx &= \int \frac{t^2-1}{t} \cdot 2t dt \\
 &= 2 \int (t^2 - 1) dt = 2 \left(\frac{t^3}{3} - t \right) + C \\
 &= \frac{2}{3} t(t^2 - 3) + C \\
 &= \frac{2}{3} \sqrt{x+1} \{(x+1) - 3\} + C \\
 &= \frac{2}{3} (x-2)\sqrt{x+1} + C \quad \text{答}
 \end{aligned}$$

C $f(g(x))g'(x)$ の不定積分練習
6

次の不定積分を求めよ。

(1) $\int x^2 \sqrt{x^3+2} dx$

(2) $\int \sin^3 x \cos x dx$

(3) $\int \frac{\log x}{x} dx$

指針 置換積分法(2) 被積分関数を2つの関数の積とみて、一方を $f(g(x))$ としたと

き他方が $g'(x)$ (その定数倍でもよい) となっていることを確かめる。

$g(x)=u$ において, $f(u)$ の不定積分を求めればよい。

(1) $(x^3+2)'=3x^2$ であるから, $x^3+2=u(=g(x))$ とおく。

(2) $(\sin x)'=\cos x$ であるから, $\sin x=u$ とおく。

(3) $(\log x)'=\frac{1}{x}$ であるから, $\log x=u$ とおく。

解答 (1) $x^3+2=u$ とおくと $3x^2 dx=du$

$$\leftarrow 3x^2 = \frac{du}{dx}$$

$$\int x^2 \sqrt{x^3+2} dx = \frac{1}{3} \int \sqrt{x^3+2} \cdot 3x^2 dx$$

$$\leftarrow x^2 = \frac{1}{3} \cdot 3x^2$$

$$= \frac{1}{3} \int \sqrt{u} du = \frac{1}{3} \cdot \frac{2}{3} u^{\frac{3}{2}} + C$$

$$\leftarrow \int f(u) du$$

$$= \frac{2}{9} (x^3+2) \sqrt{x^3+2} + C \quad \text{答}$$

$$\leftarrow x^3+2 \text{ にもどす。}$$

(2) $\sin x=u$ とおくと $\cos x dx=du$

$$\leftarrow \cos x = \frac{du}{dx}$$

$$\int \sin^3 x \cos x dx = \int u^3 du = \frac{u^4}{4} + C = \frac{1}{4} \sin^4 x + C \quad \text{答}$$

(3) $\log x=u$ とおくと $\frac{1}{x} dx=du$

$$\leftarrow \frac{1}{x} = \frac{du}{dx}$$

$$\int \frac{\log x}{x} dx = \int \log x \cdot \frac{1}{x} dx = \int u du$$

$$= \frac{u^2}{2} + C = \frac{1}{2} (\log x)^2 + C \quad \text{答}$$

注意 十分に慣れたら, u とおく段階を省いてもよい。

D $\frac{g'(x)}{g(x)}$ の不定積分

教 p.145

練習
7

次の不定積分を求めよ。

(1) $\int \frac{2x+1}{x^2+x-1} dx$

(2) $\int \frac{e^x}{e^x+1} dx$

(3) $\int \frac{dx}{\tan x}$

指針 $\frac{g'(x)}{g(x)}$ の不定積分 分子が分母の導関数になっているかを確認する。

(3) 被積分関数は $\frac{1}{\tan x}$ であり, これを $\frac{g'(x)}{g(x)}$ の形に変形する。

三角関数の相互関係 $\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$ を利用する。

解答 (1) $\int \frac{2x+1}{x^2+x-1} dx = \int \frac{(x^2+x-1)'}{x^2+x-1} dx = \log|x^2+x-1| + C \quad \text{答}$

(2) $\int \frac{e^x}{e^x+1} dx = \int \frac{(e^x+1)'}{e^x+1} dx = \log(e^x+1) + C \quad \text{答}$

$$(3) \int \frac{dx}{\tan x} = \int \frac{\cos x}{\sin x} dx = \int \frac{(\sin x)'}{\sin x} dx = \log|\sin x| + C \quad \text{答}$$

注意 (2) $e^x + 1 > 0$ であるから、 $\log|e^x + 1|$ は $\log(e^x + 1)$ としてよい。

E 部分積分法

教 p.146

練習
8

次の不定積分を求めよ。

$$(1) \int x \sin x dx$$

$$(2) \int x e^{-x} dx$$

指針 部分積分法 被積分関数は x と他の関数の積と考えられる。部分積分法の公式 4 において、 $f(x) = x$ とすると、 $f'(x) = (x)' = 1$ であるから

$$\int x g'(x) dx = x g(x) - \int g(x) dx$$

が成り立つ。右辺の第 2 項は単独の関数 $g(x)$ の不定積分となり、計算しやすくなる。

(1) では $g'(x) = \sin x$ 、(2) では $g'(x) = e^{-x}$ として、 $g(x)$ を考える。

$g(x)$ はそれぞれ $\sin x$ 、 e^{-x} の不定積分 ($C=0$ としてよい) である。

解答 (1) $\int x \sin x dx = \int x(-\cos x)' dx$

$$\leftarrow \int f(x)g'(x) dx$$

$$= x(-\cos x) - \int (x)'(-\cos x) dx$$

の形を作る。
→ 公式 4

$$= -x \cos x + \int \cos x dx$$

$$= -x \cos x + \sin x + C \quad \text{答}$$

(2) $\int x e^{-x} dx = \int x(-e^{-x})' dx$

$$\leftarrow (-e^{-x})' = e^{-x}$$

$$= x(-e^{-x}) - \int (x)'(-e^{-x}) dx$$

$$= -x e^{-x} + \int e^{-x} dx$$

$$= -x e^{-x} - e^{-x} + C$$

$$= -(x+1)e^{-x} + C \quad \text{答}$$

教 p.146

深
め
る

教科書の例題 4 の解答では、部分積分法の公式 4 において $f(x) = x$ 、 $g'(x) = \cos x$ と考えている。

$f'(x) = \cos x$ 、 $g'(x) = x$ と考えて公式 4 を適用してみよう。このことから、 $f(x) = x$ 、 $g'(x) = \cos x$ と考えた理由を説明してみよう。

解答 $f(x)=\cos x$, $g'(x)=x$ と考えると

$$\begin{aligned}\int x \cos x dx &= \int \left(\frac{1}{2}x^2\right)' \cos x dx \\ &= \frac{1}{2}x^2 \cos x - \int \frac{1}{2}x^2 (\cos x)' dx \\ &= \frac{1}{2}x^2 \cos x + \int \frac{1}{2}x^2 \sin x dx\end{aligned}$$

このように, $f(x)=\cos x$, $g'(x)=x$ と考えると, 被積分関数が 2 つの関数の積の形のままだが, 例題 4 の解答のように, $f(x)=x$, $g'(x)=\cos x$ と考えて計算をすると, 2 つの関数の積の形が解消され, 不定積分が求められる形になる。 図

練習
9

次の不定積分を求めよ。

$$(1) \int \log 2x dx \quad (2) \int \log x^2 dx \quad (3) \int x \log x dx$$

指針 部分積分法 (対数関数の不定積分)

(1), (2) 教科書の応用例題 1 と同様に, $\log 2x \cdot (x)'$, $(\log x^2) \cdot (x)'$ と考え, $f(x)$ を対数関数, $g(x)=x$ とみて部分積分法を用いる。

(3) $f(x)=\log x$, $g(x)=\frac{x^2}{2}$ と考える。

解答 (1) $\int \log 2x dx = \int (\log 2x) \cdot (x)' dx$

$$\leftarrow \log 2x \cdot 1 = \log 2x \cdot (x)'$$

$$= (\log 2x) \cdot x - \int (\log 2x)' \cdot x dx$$

$$= x \log 2x - \int \frac{2}{2x} \cdot x dx$$

$$\leftarrow (\log 2x)' = \frac{(2x)'}{2x}$$

$$= x \log 2x - x + C \quad \text{図}$$

(2) $\int \log x^2 dx = \int (\log x^2) \cdot (x)' dx$

$$\leftarrow (\log x^2) \cdot 1 = (\log x^2) \cdot (x)'$$

$$= (\log x^2) \cdot x - \int (\log x^2)' \cdot x dx$$

$$= x \log x^2 - \int \frac{2x}{x^2} \cdot x dx$$

$$\leftarrow (\log x^2)' = \frac{(x^2)'}{x^2}$$

$$= x \log x^2 - 2x + C \quad \text{図}$$

(3) $\int x \log x dx = \int \left(\frac{x^2}{2}\right)' \log x dx$

$$\leftarrow x = \left(\frac{x^2}{2}\right)'$$

$$= \frac{x^2}{2} \log x - \int \frac{x^2}{2} \cdot (\log x)' dx$$

$$= \frac{1}{2}x^2 \log x - \frac{1}{2} \int x^2 \cdot \frac{1}{x} dx$$

$$\leftarrow \int x dx = \frac{x^2}{2} + C$$

5
章

積分法とその応用

$$= \frac{1}{2}x^2 \log x - \frac{1}{4}x^2 + C \quad \square$$

練習

10

教 p.147

不定積分 $\int (x^2+1) \sin x dx$ を求めよ。

指針 部分積分法 (2 回適用) 練習 8, 9 と同様に, 部分積分法を利用するが,

$\int 2x \cos x dx$ が出てくる。よって, さらに部分積分法を利用する。

解答 $\int (x^2+1) \sin x dx = \int (x^2+1)(-\cos x)' dx$

$$= (x^2+1)(-\cos x) + \int 2x \cos x dx$$

$$= -(x^2+1) \cos x + 2 \int x(\sin x)' dx$$

$$= -(x^2+1) \cos x + 2 \left(x \sin x - \int \sin x dx \right)$$

$$= -(x^2+1) \cos x + 2x \sin x + 2 \cos x + C$$

$$= (1-x^2) \cos x + 2x \sin x + C \quad \square$$

3 いろいろな関数の不定積分

まとめ

1 半角の公式, 2 倍角の公式から得られる公式

$$\sin^2 \alpha = \frac{1 - \cos 2\alpha}{2} \quad \cos^2 \alpha = \frac{1 + \cos 2\alpha}{2} \quad \sin \alpha \cos \alpha = \frac{\sin 2\alpha}{2}$$

2 積を和や差の形にする公式

$$\sin \alpha \cos \beta = \frac{1}{2} \{ \sin(\alpha + \beta) + \sin(\alpha - \beta) \}$$

← 右辺に加法定理を
使えば左辺を導く
ことができる。

$$\cos \alpha \cos \beta = \frac{1}{2} \{ \cos(\alpha + \beta) + \cos(\alpha - \beta) \}$$

$$\sin \alpha \sin \beta = -\frac{1}{2} \{ \cos(\alpha + \beta) - \cos(\alpha - \beta) \}$$

A 分数関数の不定積分

教 p.148

練習
11

$\frac{x}{(x+1)(x+2)} = \frac{a}{x+1} + \frac{b}{x+2}$ が成り立つように, 定数 a, b の値を定めよ。また, 不定積分 $\int \frac{x}{(x+1)(x+2)} dx$ を求めよ。

指針 分数関数の不定積分 問題文の1行目のように, 1つの分数式を簡単な分数式の和や差で表すことを, 部分分数に分解するという。分子 a, b を決めるには, 恒等式の性質を利用する。

この変形により, 不定積分の公式が使えるようになる。

解答 与えられた等式の両辺に $(x+1)(x+2)$ を掛けて分母を払うと

$$x = a(x+2) + b(x+1)$$

右辺を整理して $x = (a+b)x + (2a+b)$

同じ次数の項の係数を比較して

← 恒等式の性質

$$a+b=1, \quad 2a+b=0$$

これを解いて $a=-1, b=2$ 答

$$\text{よって } \int \frac{x}{(x+1)(x+2)} dx = \int \left(-\frac{1}{x+1} + \frac{2}{x+2} \right) dx$$

$$= -\log|x+1| + 2\log|x+2| + C$$

$$= \log \frac{(x+2)^2}{|x+1|} + C \quad \text{答}$$

5章

積分法とその応用

練習
12

次の不定積分を求めよ。

$$(1) \int \frac{x^2-1}{x+2} dx \quad (2) \int \frac{4x^2}{2x-1} dx \quad (3) \int \frac{3}{x^2+x-2} dx$$

指針 分数関数の不定積分

(1), (2) (分子の次数) $\geq$ (分母の次数) のときは, 帯分数に直す要領で変形する。

(3) 分母を因数分解して部分分数に分解する。

解答 (1) $\frac{x^2-1}{x+2} = x-2 + \frac{3}{x+2}$ であるから

$$\int \frac{x^2-1}{x+2} dx = \int \left(x-2 + \frac{3}{x+2} \right) dx$$

$$= \frac{1}{2}x^2 - 2x + 3 \log|x+2| + C \quad \text{答}$$

$$\leftarrow x+2 \frac{x-2}{x^2+2x} - 1$$

$$\frac{x^2+2x}{-2x-1}$$

$$\frac{-2x-4}{3}$$

(2) $\frac{4x^2}{2x-1} = 2x+1 + \frac{1}{2x-1}$ であるから

$$\int \frac{4x^2}{2x-1} dx = \int \left(2x+1 + \frac{1}{2x-1} \right) dx$$

$$= x^2 + x + \frac{1}{2} \log|2x-1| + C \quad \text{答}$$

$$\leftarrow 2x-1 \frac{2x+1}{4x^2-2x} - 1$$

$$\frac{4x^2-2x}{2x}$$

$$\frac{2x-1}{1}$$

(3) $\frac{3}{x^2+x-2} = \frac{3}{(x-1)(x+2)} = \frac{1}{x-1} - \frac{1}{x+2}$ であるから

$$\int \frac{3}{x^2+x-2} dx = \int \left(\frac{1}{x-1} - \frac{1}{x+2} \right) dx$$

$$= \log|x-1| - \log|x+2| + C$$

$$= \log \left| \frac{x-1}{x+2} \right| + C \quad \text{答}$$

B 三角関数に関する不定積分

練習
13

次の不定積分を求めよ。

$$(1) \int \cos^2 x dx \quad (2) \int \sin^2 3x dx \quad (3) \int \sin x \cos x dx$$

$$(4) \int \cos 3x \cos 2x dx \quad (5) \int \sin x \sin 3x dx$$

指針 三角関数に関する不定積分 本書 p.189 のまとめの三角関数の公式を利用すると, 2乗や積が解消されて三角関数の1次式として表される。

それぞれの不定積分は, $f(ax+b)$ の不定積分の公式を使って簡単に求めることができる。

$$\text{解答 (1)} \quad \int \cos^2 x dx = \int \frac{1 + \cos 2x}{2} dx$$

$$= \frac{1}{2} \int (1 + \cos 2x) dx$$

$$= \frac{1}{2} \left(x + \frac{1}{2} \sin 2x \right) + C$$

$$= \frac{1}{2} x + \frac{1}{4} \sin 2x + C \quad \text{答}$$

$$(2) \quad \int \sin^2 3x dx = \int \frac{1 - \cos 6x}{2} dx$$

$$= \frac{1}{2} \int (1 - \cos 6x) dx$$

$$= \frac{1}{2} \left(x - \frac{1}{6} \sin 6x \right) + C$$

$$= \frac{1}{2} x - \frac{1}{12} \sin 6x + C \quad \text{答}$$

$$(3) \quad \int \sin x \cos x dx = \frac{1}{2} \int \sin 2x dx$$

$$= \frac{1}{2} \left(-\frac{1}{2} \cos 2x \right) + C$$

$$= -\frac{1}{4} \cos 2x + C \quad \text{答}$$

$$(4) \quad \int \cos 3x \cos 2x dx = \frac{1}{2} \int (\cos 5x + \cos x) dx$$

$$= \frac{1}{2} \left(\frac{1}{5} \sin 5x + \sin x \right) + C$$

$$= \frac{1}{10} \sin 5x + \frac{1}{2} \sin x + C \quad \text{答}$$

$$(5) \quad \int \sin x \sin 3x dx = \int \sin 3x \sin x dx$$

$$= -\frac{1}{2} \int (\cos 4x - \cos 2x) dx$$

$$= -\frac{1}{2} \left(\frac{1}{4} \sin 4x - \frac{1}{2} \sin 2x \right) + C$$

$$= -\frac{1}{8} \sin 4x + \frac{1}{4} \sin 2x + C \quad \text{答}$$

$$\leftarrow \cos^2 \alpha = \frac{1 + \cos 2\alpha}{2}$$

$$\leftarrow \int \cos 2x dx$$

$$= \frac{1}{2} \sin 2x + C$$

$$\leftarrow \sin^2 \alpha = \frac{1 - \cos 2\alpha}{2}$$

$$\leftarrow \int \cos 6x dx$$

$$= \frac{1}{6} \sin 6x + C$$

$$\leftarrow \sin \alpha \cos \alpha = \frac{\sin 2\alpha}{2}$$

$$\leftarrow \cos \alpha \cos \beta \text{ の公式}$$

$$\leftarrow \sin \alpha \sin \beta \text{ の公式}$$

5章

積分法とその応用

第5章 第1節

問 題

教 p.150

1 次の不定積分を求めよ。

$$(1) \int \sqrt[3]{x^2} dx \quad (2) \int \frac{(x^2-2)(x^2-3)}{x^4} dx \quad (3) \int \frac{(\sqrt{x}+1)^3}{x} dx$$

$$(4) \int (2-\tan x) \cos x dx \quad (5) \int 2^{x+1} dx$$

指針 不定積分の計算 (和・差, 三角関数, 指数関数)

(1)~(3) 被積分関数を x^α の形の項に分け, 各項ごとに

$$\int x^\alpha dx = \frac{1}{\alpha+1} x^{\alpha+1} + C \quad (\alpha \neq -1), \quad \int \frac{1}{x} dx = \log|x| + C \text{ を使って求める。}$$

(4) $\sin x, \cos x$ で表し, $\int \sin x dx = -\cos x + C, \int \cos x dx = \sin x + C$ を使う。(5) $\int a^x dx = \frac{a^x}{\log a} + C, F'(x) = f(x), a \neq 0$ とするとき

$$\int f(ax+b) dx = \frac{1}{a} F(ax+b) + C \text{ となることを使う。}$$

解答 (1) $\int \sqrt[3]{x^2} dx = \int x^{\frac{2}{3}} dx = \frac{1}{\frac{2}{3}+1} x^{\frac{2}{3}+1} + C = \frac{3}{5} x^{\frac{5}{3}} + C$ 答

$$\begin{aligned} (2) \int \frac{(x^2-2)(x^2-3)}{x^4} dx &= \int \frac{x^4-5x^2+6}{x^4} dx = \int \left(1 - \frac{5}{x^2} + \frac{6}{x^4}\right) dx \\ &= \int dx - 5 \int x^{-2} dx + 6 \int x^{-4} dx \\ &= x - \frac{5}{-2+1} \cdot x^{-2+1} + \frac{6}{-4+1} \cdot x^{-4+1} + C = x + \frac{5}{x} - \frac{2}{x^3} + C \end{aligned}$$
 答

$$\begin{aligned} (3) \int \frac{(\sqrt{x}+1)^3}{x} dx &= \int \frac{x\sqrt{x}+3x+3\sqrt{x}+1}{x} dx \\ &= \int \left(\sqrt{x}+3+\frac{3}{\sqrt{x}}+\frac{1}{x}\right) dx \\ &= \int x^{\frac{1}{2}} dx + 3 \int dx + 3 \int x^{-\frac{1}{2}} dx + \int \frac{dx}{x} \\ &= \frac{1}{\frac{1}{2}+1} \cdot x^{\frac{1}{2}+1} + 3x + \frac{3}{-\frac{1}{2}+1} \cdot x^{-\frac{1}{2}+1} + \log x + C \\ &= \frac{2}{3} x\sqrt{x} + 3x + 6\sqrt{x} + \log x + C \end{aligned}$$
 答

$$(4) \int (2-\tan x) \cos x dx = \int \left(2 - \frac{\sin x}{\cos x}\right) \cos x dx$$

$$\begin{aligned}
 &= \int (2 \cos x - \sin x) dx = 2 \int \cos x dx - \int \sin x dx \\
 &= 2 \sin x + \cos x + C \quad \text{答} \\
 (5) \quad &\int 2^{x+1} dx = \frac{2^{x+1}}{\log 2} + C \quad \text{答}
 \end{aligned}$$

教 p.150

2 次の2つの条件をともに満たす関数 $F(x)$ を求めよ。

$$[1] \quad F'(x) = \frac{1-x-x^2}{x^2} \qquad [2] \quad F(e) = -1$$

指針 関数の決定 [1]により、不定積分を計算し、[2]により、積分定数 C の値を定めて、 $F(x)$ を求める。

解答 [1] から
$$F(x) = \int \frac{1-x-x^2}{x^2} dx = \int \left(\frac{1}{x^2} - \frac{1}{x} - 1 \right) dx$$

$$= -\frac{1}{x} - \log|x| - x + C$$

[2] から
$$-\frac{1}{e} - \log|e| - e + C = -1$$

よって
$$C = e + \frac{1}{e}$$

したがって
$$F(x) = -\frac{1}{x} - \log|x| - x + e + \frac{1}{e} \quad \text{答}$$

教 p.150

3 次の不定積分を求めよ。

$$(1) \quad \int \frac{dx}{5x+1} \qquad (2) \quad \int \sqrt[3]{3-2x} dx \qquad (3) \quad \int \sin(2x-1) dx$$

$$(4) \quad \int \sin^3 x dx \qquad (5) \quad \int \frac{x}{\sqrt{4-x^2}} dx \qquad (6) \quad \int x e^{x^2} dx$$

$$(7) \quad \int \frac{\sin x}{1+\cos x} dx \qquad (8) \quad \int (x+1)e^x dx \qquad (9) \quad \int (2x+1)\log x dx$$

指針 不定積分の計算 (1)~(3) では $\int f(ax+b) dx = \frac{1}{a} F(ax+b) + C$ ($a \neq 0$) を、
(4)~(9) では以下の積分法の公式を利用する。

1 $\int f(x) dx = \int f(g(t))g'(t) dt$ ただし、 $x=g(t)$ 置換積分法

2 $\int f(g(x))g'(x) dx = \int f(u) du$ ただし、 $g(x)=u$ 置換積分法

3 $\int \frac{g'(x)}{g(x)} dx = \log|g(x)| + C$

$$4 \quad \int f(x)g'(x) dx = f(x)g(x) - \int f'(x)g(x) dx \quad \text{部分積分法}$$

解答 (1) $\int \frac{dx}{5x+1} = \frac{1}{5} \log|5x+1| + C$ 答

$$\begin{aligned} (2) \quad \int \sqrt[3]{3-2x} dx &= \int (3-2x)^{\frac{1}{3}} dx \\ &= -\frac{1}{2} \cdot \frac{(3-2x)^{\frac{1}{3}+1}}{\frac{1}{3}+1} + C \\ &= -\frac{3}{8} (3-2x)^{\frac{4}{3}} + C \quad \text{答} \end{aligned}$$

$$(3) \quad \int \sin(2x-1) dx = -\frac{1}{2} \cos(2x-1) + C \quad \text{答}$$

$$(4) \quad \int \sin^3 x dx = \int (1-\cos^2 x) \sin x dx \quad \leftarrow \sin^2 x = 1 - \cos^2 x$$

$$\cos x = t \text{ とおくと} \quad \sin x dx = -dt$$

$$\begin{aligned} \int (1-\cos^2 x) \sin x dx &= \int (1-t^2)(-1) dt = \int (-1+t^2) dt \\ &= -t + \frac{t^3}{3} + C \end{aligned}$$

$$= -\cos x + \frac{1}{3} \cos^3 x + C \quad \text{答}$$

$$(5) \quad 4-x^2 = u \text{ とおくと} \quad -2x dx = du$$

$$\begin{aligned} \int \frac{x}{\sqrt{4-x^2}} dx &= -\frac{1}{2} \int \frac{-2x}{\sqrt{4-x^2}} dx = -\frac{1}{2} \int \frac{du}{\sqrt{u}} \\ &= -\frac{1}{2} \int u^{-\frac{1}{2}} du = -\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{-\frac{1}{2}+1} u^{-\frac{1}{2}+1} + C \\ &= -u^{\frac{1}{2}} + C = -\sqrt{4-x^2} + C \quad \text{答} \end{aligned}$$

$$(6) \quad x^2 = t \text{ とおくと} \quad 2x dx = dt$$

$$\begin{aligned} \int x e^{x^2} dx &= \frac{1}{2} \int e^{x^2} \cdot 2x dx = \frac{1}{2} \int e^t dt \\ &= \frac{1}{2} e^t + C = \frac{1}{2} e^{x^2} + C \quad \text{答} \end{aligned}$$

$$(7) \quad \int \frac{\sin x}{1+\cos x} dx = -\int \frac{(1+\cos x)'}{1+\cos x} dx = -\log(1+\cos x) + C \quad \text{答}$$

$$\begin{aligned} (8) \quad \int (x+1)e^x dx &= \int (x+1)(e^x)' dx = (x+1)e^x - \int (x+1)' e^x dx \\ &= (x+1)e^x - \int e^x dx = (x+1)e^x - e^x + C \\ &= x e^x + C \quad \text{答} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 (9) \quad \int (2x+1) \log x \, dx &= \int (x^2+x)' \log x \, dx \\
 &= (x^2+x) \log x - \int (x^2+x) \cdot \frac{1}{x} \, dx \\
 &= (x^2+x) \log x - \int (x+1) \, dx \\
 &= (x^2+x) \log x - \int x \, dx - \int dx \\
 &= (x^2+x) \log x - \frac{x^2}{2} - x + C \quad \text{答}
 \end{aligned}$$

教 p.150

4 $\frac{1}{\sin x} = \frac{\sin x}{1-\cos^2 x}$ であることを用いて、不定積分 $\int \frac{dx}{\sin x}$ を求めよ。

指針 置換積分法

$\cos x = t$ とおく。また、 $\frac{1}{t^2-1} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{t-1} - \frac{1}{t+1} \right)$ の変形も利用する。

解答 $\int \frac{dx}{\sin x} \left(= \int \frac{\sin x}{\sin^2 x} \, dx \right) = \int \frac{\sin x}{1-\cos^2 x} \, dx$

$\cos x = t$ とおくと $\sin x \, dx = -dt$

よって $\int \frac{dx}{\sin x} = \int \frac{1}{1-t^2} (-dt) = \int \frac{dt}{t^2-1} = \frac{1}{2} \int \left(\frac{1}{t-1} - \frac{1}{t+1} \right) dt$

$$= \frac{1}{2} (\log|t-1| - \log|t+1|) + C$$

$$= \frac{1}{2} \log \left| \frac{t-1}{t+1} \right| + C = \frac{1}{2} \log \left| \frac{\cos x - 1}{\cos x + 1} \right| + C$$

$$= \frac{1}{2} \log \left| \frac{1-\cos x}{1+\cos x} \right| + C$$

$$= \frac{1}{2} \log \frac{1-\cos x}{1+\cos x} + C \quad \text{答}$$

補足 被積分関数 $\frac{1}{\sin x}$ の定義域は $\sin x \neq 0$ より $x \neq n\pi$ (n は整数) である。このとき、

$$-1 < \cos x < 1 \text{ より, } \frac{1-\cos x}{1+\cos x} > 0 \text{ であるから, } \left| \frac{1-\cos x}{1+\cos x} \right| = \frac{1-\cos x}{1+\cos x} \text{ となる。}$$

教 p.150

5 次の不定積分を求めよ。

(1) $\int \frac{x-3}{x^2-1} \, dx$

(2) $\int \frac{\log(x+1)}{x^2} \, dx$

(3) $\int \sin 3x \cos 2x \, dx$

(4) $\int \cos^4 x \, dx$

指針 不定積分の計算 (部分分数分解, 三角関数の公式など)

- (1) 被積分関数の分母が因数分解できるから, 部分分数に分解することを考える。
 (2) $\frac{1}{x^2} = \left(-\frac{1}{x}\right)'$ と考えると部分積分法が利用できる。
 (3), (4) 三角関数の性質を利用して積分しやすい形に直す。

解答 (1) $\frac{x-3}{x^2-1} = \frac{x-3}{(x+1)(x-1)} = \frac{2}{x+1} - \frac{1}{x-1}$ であるから ← 補足 参照

$$\begin{aligned}\int \frac{x-3}{x^2-1} dx &= \int \left(\frac{2}{x+1} - \frac{1}{x-1} \right) dx = 2 \log|x+1| - \log|x-1| + C \\ &= \log \frac{(x+1)^2}{|x-1|} + C \quad \text{答}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(2) \int \frac{\log(x+1)}{x^2} dx &= \int \log(x+1) \cdot \left(-\frac{1}{x}\right)' dx \\ &= \log(x+1) \cdot \left(-\frac{1}{x}\right) - \int \{\log(x+1)\}' \cdot \left(-\frac{1}{x}\right) dx \\ &= -\frac{\log(x+1)}{x} + \int \frac{dx}{x(x+1)} = -\frac{\log(x+1)}{x} + \int \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{x+1} \right) dx \\ &= -\frac{\log(x+1)}{x} + \log|x| - \log(x+1) + C \\ &= -\frac{\log(x+1)}{x} + \log \frac{|x|}{x+1} + C \quad \text{答}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(3) \int \sin 3x \cos 2x dx &= \frac{1}{2} \int (\sin 5x + \sin x) dx \\ &= \frac{1}{2} \left(-\frac{1}{5} \cos 5x - \cos x \right) + C = -\frac{1}{10} \cos 5x - \frac{1}{2} \cos x + C \quad \text{答}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(4) \cos^4 x &= (\cos^2 x)^2 = \left(\frac{1+\cos 2x}{2} \right)^2 = \frac{1}{4} \left(1 + 2\cos 2x + \frac{1+\cos 4x}{2} \right) \\ &= \frac{1}{8} \cos 4x + \frac{1}{2} \cos 2x + \frac{3}{8}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\text{よって} \quad \int \cos^4 x dx &= \int \left(\frac{1}{8} \cos 4x + \frac{1}{2} \cos 2x + \frac{3}{8} \right) dx \\ &= \frac{1}{32} \sin 4x + \frac{1}{4} \sin 2x + \frac{3}{8} x + C \quad \text{答}\end{aligned}$$

補足 (1) $\frac{x-3}{x^2-1} = \frac{x-3}{(x+1)(x-1)} = \frac{a}{x+1} + \frac{b}{x-1}$ において, 分母を払い, 係数を比較して, a, b の値を求める。

6 不定積分 $\int \frac{dx}{e^x+1}$ を、次の3通りの方法で求めよ。

- ① 被積分関数の分母と分子に e^x を掛ける。
- ② 被積分関数の分母と分子に e^{-x} を掛ける。
- ③ $\frac{e^x}{e^x+1} + \frac{1}{e^x+1} = 1$ であることを用いる。

指針 いろいろな不定積分

- ① $e^x = t$ とおいて、置換積分法を用いる。
- ②, ③ $\int \frac{g'(x)}{g(x)} dx = \log|g(x)| + C$ を利用する。

解答 ① $e^x = t$ とおくと $e^x dx = dt$

$$\begin{aligned}\int \frac{dx}{e^x+1} &= \int \frac{e^x}{e^x(e^x+1)} dx = \int \frac{dt}{t(t+1)} \\ &= \int \left(\frac{1}{t} - \frac{1}{t+1} \right) dt = \log t - \log(t+1) + C \\ &= x - \log(e^x+1) + C \quad \text{答}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\text{② } \int \frac{dx}{e^x+1} &= \int \frac{e^{-x}}{e^{-x}(e^x+1)} dx = \int \frac{e^{-x}}{1+e^{-x}} dx \\ &= - \int \frac{(1+e^{-x})'}{1+e^{-x}} dx = -\log(1+e^{-x}) + C \\ &= -\log \frac{e^x+1}{e^x} + C = -\{\log(e^x+1) - \log e^x\} + C \\ &= x - \log(e^x+1) + C \quad \text{答}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\text{③ } \int \frac{dx}{e^x+1} &= \int \left(1 - \frac{e^x}{e^x+1} \right) dx \\ &= \int dx - \int \frac{(e^x+1)'}{e^x+1} dx \\ &= x - \log(e^x+1) + C \quad \text{答}\end{aligned}$$

どの方法で求めても
結果は同じだね。



第2節 定積分

4 定積分とその基本性質

まとめ

1 定積分

ある区間で連続な関数 $f(x)$ の原始関数の1つを $F(x)$ とし, a, b をその区間に含まれる任意の値とすると, 定積分 $\int_a^b f(x) dx$ は, 次のように定義される。

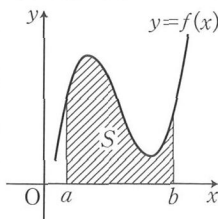
$$\int_a^b f(x) dx = \left[F(x) \right]_a^b = F(b) - F(a)$$

a をこの定積分の 下端, b を 上端 という。定積分 $\int_a^b f(x) dx$ を求めることを, $f(x)$ を a から b まで積分する という。

区間 $[a, b]$ で常に $f(x) \geq 0$ のとき, 定積分

$\int_a^b f(x) dx$ は, 曲線 $y=f(x)$ と x 軸および2直線

$x=a, x=b$ で囲まれた図の斜線部分の面積 S を表す。



2 定積分の性質

$$\text{① } \int_a^b k f(x) dx = k \int_a^b f(x) dx \quad k \text{ は定数}$$

$$\text{② } \int_a^b \{f(x) + g(x)\} dx = \int_a^b f(x) dx + \int_a^b g(x) dx$$

$$\text{③ } \int_a^b \{f(x) - g(x)\} dx = \int_a^b f(x) dx - \int_a^b g(x) dx$$

$$\text{④ } \int_a^a f(x) dx = 0$$

$$\text{⑤ } \int_b^a f(x) dx = - \int_a^b f(x) dx$$

$$\text{⑥ } \int_a^b f(x) dx = \int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx$$

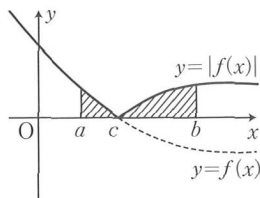
3 絶対値のついた関数の定積分

関数 $f(x)$ が

$$a \leq x \leq c \text{ で } f(x) \geq 0,$$

$$c \leq x \leq b \text{ で } f(x) \leq 0$$

であるとき、絶対値のついた関数 $|f(x)|$ を a から b まで積分するには、次のように区間を分けて行う。



$$\int_a^b |f(x)| dx = \int_a^c f(x) dx + \int_c^b \{-f(x)\} dx$$

この定積分 $\int_a^b |f(x)| dx$ は、図の斜線部分の面積の和を表している。

A 定積分

教 p.151

練習
14

次の定積分を求めよ。

(1) $\int_1^2 \frac{dx}{x^2}$

(2) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos \theta d\theta$

(3) $\int_{-2}^{-1} \frac{dx}{x}$

(4) $\int_{-1}^1 2^x dx$

指針 定積分の計算 原始関数としては、不定積分のうち $C=0$ としたものを使えばよい。定積分は、原始関数に上端、下端を代入したそれぞれの式の値の差である。

解答 (1) $\int_1^2 \frac{dx}{x^2} = \left[-\frac{1}{x} \right]_1^2 = -\frac{1}{2} - (-1) = \frac{1}{2}$ 答

(2) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos \theta d\theta = \left[\sin \theta \right]_0^{\frac{\pi}{2}} = 1 - 0 = 1$ 答

(3) $\int_{-2}^{-1} \frac{dx}{x} = \left[\log|x| \right]_{-2}^{-1} = \log 1 - \log 2 = -\log 2$ 答

(4) $\int_{-1}^1 2^x dx = \left[\frac{2^x}{\log 2} \right]_{-1}^1 = \frac{2}{\log 2} - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\log 2}$
 $= \frac{3}{2 \log 2}$ 答

5
章

積分法とその応用

B 定積分の基本性質

教 p.152

練習
15

次の定積分を求めよ。

$$\begin{array}{lll}
 (1) \int_1^2 \sqrt{x+1} dx & (2) \int_0^1 (2x+1)^3 dx & (3) \int_{-1}^1 (e^t - e^{-t}) dt \\
 (4) \int_0^\pi \sin 2x dx & (5) \int_0^{2\pi} \cos^2 x dx & (6) \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin 4\theta \cos 2\theta d\theta
 \end{array}$$

指針 定積分の計算 (5), (6) はじめに被積分関数を変形する。

$$\begin{aligned}
 \text{解答 (1)} \quad \int_1^2 \sqrt{x+1} dx &= \left[\frac{2}{3} (x+1)^{\frac{3}{2}} \right]_1^2 = \frac{2}{3} \left[(x+1)\sqrt{x+1} \right]_1^2 \\
 &= \frac{2}{3} (3\sqrt{3} - 2\sqrt{2}) \quad \text{答}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 (2) \quad \int_0^1 (2x+1)^3 dx &= \left[\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{4} (2x+1)^4 \right]_0^1 \\
 &= \frac{1}{8} (3^4 - 1) = 10 \quad \text{答}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 (3) \quad \int_{-1}^1 (e^t - e^{-t}) dt &= \left[e^t + e^{-t} \right]_{-1}^1 \\
 &= \left(e + \frac{1}{e} \right) - \left(\frac{1}{e} + e \right) = 0 \quad \text{答}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 (4) \quad \int_0^\pi \sin 2x dx &= \left[-\frac{1}{2} \cos 2x \right]_0^\pi = -\frac{1}{2} (\cos 2\pi - \cos 0) \\
 &= -\frac{1}{2} (1 - 1) = 0 \quad \text{答}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 (5) \quad \int_0^{2\pi} \cos^2 x dx &= \int_0^{2\pi} \frac{1 + \cos 2x}{2} dx \\
 &= \frac{1}{2} \left[x + \frac{1}{2} \sin 2x \right]_0^{2\pi} = \frac{1}{2} (2\pi - 0) = \pi \quad \text{答}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 (6) \quad \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin 4\theta \cos 2\theta d\theta &= \frac{1}{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin 6\theta + \sin 2\theta) d\theta \\
 &= -\frac{1}{12} \left[\cos 6\theta \right]_0^{\frac{\pi}{2}} - \frac{1}{4} \left[\cos 2\theta \right]_0^{\frac{\pi}{2}} \\
 &= -\frac{1}{12} (-1 - 1) - \frac{1}{4} (-1 - 1) \\
 &= \frac{1}{6} + \frac{1}{2} = \frac{2}{3} \quad \text{答}
 \end{aligned}$$

C 絶対値のついた関数の定積分

教 p.153

練習
16

次の定積分を求めよ。

(1) $\int_0^4 |\sqrt{x}-1| dx$

(2) $\int_{-1}^2 |e^x-1| dx$

指針 絶対値のついた関数の定積分 教科書 p.152 の定積分の性質 6 は、積分する区間を分割して計算してよいことを示している。

適当な区間に分けて、被積分関数の絶対値記号をはずし、それぞれの区間で定積分を計算し、その和を求める。

解答 (1) $0 \leq x \leq 1$ のとき

$$|\sqrt{x}-1| = -\sqrt{x}+1$$

 $1 \leq x \leq 4$ のとき

$$|\sqrt{x}-1| = \sqrt{x}-1$$

であるから

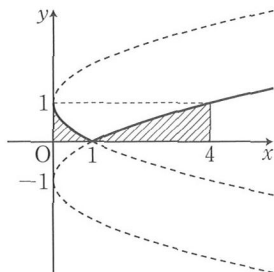
$$\begin{aligned}
 & \int_0^4 |\sqrt{x}-1| dx \\
 &= \int_0^1 (-\sqrt{x}+1) dx + \int_1^4 (\sqrt{x}-1) dx \\
 &= \left[-\frac{2}{3} x\sqrt{x} + x \right]_0^1 + \left[\frac{2}{3} x\sqrt{x} - x \right]_1^4 \\
 &= \left(-\frac{2}{3} + 1 \right) + \left\{ \left(\frac{16}{3} - 4 \right) - \left(\frac{2}{3} - 1 \right) \right\} = 2 \quad \text{答}
 \end{aligned}$$

(2) $-1 \leq x \leq 0$ のとき $|e^x-1| = -e^x+1$

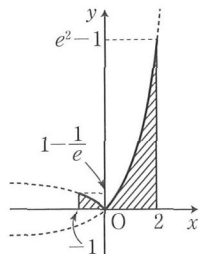
$$0 \leq x \leq 2 \text{ のとき } |e^x-1| = e^x-1$$

であるから

$$\begin{aligned}
 & \int_{-1}^2 |e^x-1| dx \\
 &= \int_{-1}^0 (-e^x+1) dx + \int_0^2 (e^x-1) dx \\
 &= \left[-e^x + x \right]_{-1}^0 + \left[e^x - x \right]_0^2 \\
 &= (-1+0) - \left(-\frac{1}{e} - 1 \right) + (e^2-2) - (1-0) \\
 &= e^2 + \frac{1}{e} - 3 \quad \text{答}
 \end{aligned}$$

5
章

積分法とその応用



5 置換積分法と部分積分法

まとめ

1 定積分の置換積分法

 $x=g(t)$ とおくとき, $a=g(\alpha)$, $b=g(\beta)$ ならば

$$\int_a^b f(x) dx = \int_{\alpha}^{\beta} f(g(t))g'(t) dt$$

x	$a \rightarrow b$
t	$\alpha \rightarrow \beta$

2 $\sqrt{a^2-x^2}$, $\frac{1}{\sqrt{a^2-x^2}}$ ($a>0$) の定積分

$x=a\sin\theta$ とおき, $dx=a\cos\theta d\theta$ および $1-\sin^2\theta=\cos^2\theta$ を用いて置換積分を行う。

3 $\frac{1}{x^2+a^2}$ ($a>0$) の定積分

$x=a\tan\theta$ とおき, $dx=\frac{a}{\cos^2\theta}d\theta$ および $\tan^2\theta+1=\frac{1}{\cos^2\theta}$ を用いて置換積分を行う。

4 偶関数と奇関数

関数 $f(x)$ において, $f(-x)=f(x)$ が常に成り立つとき, この関数を 偶関数 といい, $f(-x)=-f(x)$ が常に成り立つとき, この関数を 奇関数 という。

注意 偶関数のグラフは y 軸に関して対称, 奇関数のグラフは原点に関して対称である。

5 偶関数, 奇関数と定積分

① 偶関数 $f(x)$ について $\int_{-a}^a f(x) dx = 2\int_0^a f(x) dx$

② 奇関数 $f(x)$ について $\int_{-a}^a f(x) dx = 0$

6 定積分の部分積分法

$$\int_a^b f(x)g'(x) dx = \left[f(x)g(x) \right]_a^b - \int_a^b f'(x)g(x) dx$$

A 定積分の置換積分法

教 p.155

練習
17

次の定積分を求めよ。

(1) $\int_0^1 x(1-x)^5 dx$

(2) $\int_2^5 x\sqrt{x-1} dx$

指針 定積分の置換積分法 (1)は $1-x=t$, (2)は $\sqrt{x-1}=t$ とおき, それぞれ被積分関数を t で表し, 積分変数を t に直す。それと同時に, x と t の値の対応を調べ,

定積分の上端, 下端を改める。

解答 (1) $1-x=t$ とおくと $x=1-t$, $dx=(-1)dt$

x と t の対応は右のようになる。

x	$0 \rightarrow 1$
t	$1 \rightarrow 0$

$$\begin{aligned} \text{よって} \quad \int_0^1 x(1-x)^5 dx &= \int_1^0 (1-t)t^5 \cdot (-1) dt = \int_0^1 (t^5 - t^6) dt \\ &= \left[\frac{t^6}{6} - \frac{t^7}{7} \right]_0^1 = \frac{1}{6} - \frac{1}{7} = \frac{1}{42} \quad \text{答} \end{aligned}$$

(2) $\sqrt{x-1}=t$ とおくと $x=t^2+1$, $dx=2t dt$

x と t の対応は右のようになる。

x	$2 \rightarrow 5$
t	$1 \rightarrow 2$

$$\begin{aligned} \text{よって} \quad \int_2^5 x\sqrt{x-1} dx &= \int_1^2 (t^2+1)t \cdot 2t dt = 2 \int_1^2 (t^4 + t^2) dt \\ &= 2 \left[\frac{t^5}{5} + \frac{t^3}{3} \right]_1^2 = \frac{2}{5} (2^5 - 1) + \frac{2}{3} (2^3 - 1) \\ &= \frac{62}{5} + \frac{14}{3} = \frac{256}{15} \quad \text{答} \end{aligned}$$

別解 (2) $x-1=t$ とおくと $x=t+1$, $dx=dt$

x と t の対応は右のようになる。

x	$2 \rightarrow 5$
t	$1 \rightarrow 4$

$$\begin{aligned} \text{よって} \quad \int_2^5 x\sqrt{x-1} dx &= \int_1^4 (t+1)\sqrt{t} dt = \int_1^4 \left(t^{\frac{3}{2}} + t^{\frac{1}{2}} \right) dt \\ &= \left[\frac{2}{5} t^{\frac{5}{2}} + \frac{2}{3} t^{\frac{3}{2}} \right]_1^4 \\ &= \left(\frac{64}{5} + \frac{16}{3} \right) - \left(\frac{2}{5} + \frac{2}{3} \right) = \frac{256}{15} \quad \text{答} \end{aligned}$$

5章

積分法とその応用

練習 18

次の定積分を求めよ。

教 p.155

$$(1) \int_{-1}^1 \sqrt{1-x^2} dx \quad (2) \int_{-1}^{\sqrt{3}} \sqrt{4-x^2} dx \quad (3) \int_1^{\sqrt{3}} \frac{dx}{\sqrt{4-x^2}}$$

指針 三角関数で置換する定積分 $\sqrt{a^2-x^2}$ ($a>0$) について, $x=asin\theta$ とおく。手順は他の置換積分法と同様である。ただし, x と θ の対応については, $\sin\theta$ が周期関数であるから無数に考えられるが, 0 付近の簡単な値を選べばよい。

解答 (1) $x=\sin\theta$ とおくと $dx=\cos\theta d\theta$

x と θ の対応は右のようになる。

この範囲では $\cos\theta \geq 0$ であるから

$$\sqrt{1-x^2} = \sqrt{1-\sin^2\theta} = \sqrt{\cos^2\theta} = \cos\theta$$

よって

x	$-1 \rightarrow 1$
θ	$-\frac{\pi}{2} \rightarrow \frac{\pi}{2}$

$$\int_{-1}^1 \sqrt{1-x^2} dx = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos\theta \cdot \cos\theta d\theta = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^2\theta d\theta$$

$$\begin{aligned}
 &= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{1+\cos 2\theta}{2} d\theta = \frac{1}{2} \left[\theta + \frac{1}{2} \sin 2\theta \right]_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \\
 &= \frac{1}{2} \left\{ \frac{\pi}{2} - \left(-\frac{\pi}{2} \right) \right\} = \frac{\pi}{2} \quad \text{答}
 \end{aligned}$$

(2) $x=2\sin\theta$ とおくと $dx=2\cos\theta d\theta$

x と θ の対応は右のようになる。

この範囲では $\cos\theta > 0$ であるから

$$\sqrt{4-x^2} = \sqrt{4(1-\sin^2\theta)} = \sqrt{4\cos^2\theta} = 2\cos\theta$$

よって

$$\begin{aligned}
 \int_{-1}^{\sqrt{3}} \sqrt{4-x^2} dx &= \int_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} 2\cos\theta \cdot 2\cos\theta d\theta = 4 \int_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \cos^2\theta d\theta \\
 &= 4 \int_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{1+\cos 2\theta}{2} d\theta = 2 \left[\theta + \frac{1}{2} \sin 2\theta \right]_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \\
 &= 2 \left\{ \frac{\pi}{3} - \left(-\frac{\pi}{6} \right) \right\} + \left\{ \sin \frac{2}{3}\pi - \sin \left(-\frac{\pi}{3} \right) \right\} \\
 &= \pi + \left\{ \frac{\sqrt{3}}{2} - \left(-\frac{\sqrt{3}}{2} \right) \right\} = \pi + \sqrt{3} \quad \text{答}
 \end{aligned}$$

x	$-1 \rightarrow \sqrt{3}$
θ	$-\frac{\pi}{6} \rightarrow \frac{\pi}{3}$

(3) $x=2\sin\theta$ とおくと $dx=2\cos\theta d\theta$

x と θ の対応は右のようになる。

この範囲では $\cos\theta > 0$ であるから

$$\sqrt{4-x^2} = \sqrt{4(1-\sin^2\theta)} = \sqrt{4\cos^2\theta} = 2\cos\theta$$

よって

$$\begin{aligned}
 \int_1^{\sqrt{3}} \frac{dx}{\sqrt{4-x^2}} &= \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{1}{2\cos\theta} \cdot 2\cos\theta d\theta = \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} d\theta \\
 &= \left[\theta \right]_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} = \frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{6} \quad \text{答}
 \end{aligned}$$

x	$1 \rightarrow \sqrt{3}$
θ	$\frac{\pi}{6} \rightarrow \frac{\pi}{3}$

練習 19

次の定積分を求めよ。

(1) $\int_0^{\sqrt{3}} \frac{dx}{x^2+1}$

(2) $\int_{-2}^2 \frac{dx}{x^2+4}$

指針 三角関数で置換する定積分 $\frac{1}{x^2+a^2}$ ($a>0$) について, $x=a\tan\theta$ とおき,

$\tan^2\theta+1=\frac{1}{\cos^2\theta}$ を利用すると簡単な形になる。 x と θ の対応に注意する。

解答 (1) $x=\tan\theta$ とおくと $dx=\frac{1}{\cos^2\theta} d\theta$

x と θ の対応は右のようになる。

x	$0 \rightarrow \sqrt{3}$
θ	$0 \rightarrow \frac{\pi}{3}$

よって

$$\begin{aligned}\int_0^{\sqrt{3}} \frac{dx}{x^2+1} &= \int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{1}{\tan^2\theta+1} \cdot \frac{1}{\cos^2\theta} d\theta = \int_0^{\frac{\pi}{3}} \cos^2\theta \cdot \frac{1}{\cos^2\theta} d\theta \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{3}} d\theta = \left[\theta \right]_0^{\frac{\pi}{3}} = \frac{\pi}{3} \quad \text{答}\end{aligned}$$

$$(2) \quad x=2\tan\theta \text{ とおくと} \quad dx = \frac{2}{\cos^2\theta} d\theta$$

 x と θ の対応は右のようになる。

よって

x	$-2 \rightarrow 2$
θ	$-\frac{\pi}{4} \rightarrow \frac{\pi}{4}$

$$\begin{aligned}\int_{-2}^2 \frac{dx}{x^2+4} &= \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{4(\tan^2\theta+1)} \cdot \frac{2}{\cos^2\theta} d\theta \\ &= \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \frac{\cos^2\theta}{4} \cdot \frac{2}{\cos^2\theta} d\theta = \frac{1}{2} \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} d\theta = \frac{1}{2} \left[\theta \right]_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \\ &= \frac{1}{2} \left\{ \frac{\pi}{4} - \left(-\frac{\pi}{4} \right) \right\} = \frac{\pi}{4} \quad \text{答}\end{aligned}$$

B 偶関数, 奇関数と定積分

教 p.156

練習
20

次の関数の中から, 偶関数, 奇関数を選べ。

- ① x^3 ② x^4+3 ③ $\tan x$ ④ $x+\cos x$

指針 偶関数と奇関数 各関数を $f(x)$ とおいたとき, 常に $f(-x)=f(x)$ が成り立てば偶関数, 常に $f(-x)=-f(x)$ が成り立てば奇関数である。

解答 それぞれの関数を $f(x)$ とする。

- ① $f(-x)=(-x)^3=-x^3=-f(x)$
 ② $f(-x)=(-x)^4+3=x^4+3=f(x)$
 ③ $f(-x)=\tan(-x)=-\tan x=-f(x)$
 ④ $f(-x)=(-x)+\cos(-x)=-x+\cos x$

以上から, 偶関数は ②, 奇関数は ①, ③ 答

$$\begin{aligned}\leftarrow f(-x) &\neq f(x), \\ f(-x) &\neq -f(x)\end{aligned}$$

練習
21

次の定積分を求めよ。

教 p.157

- (1) $\int_{-2}^2 (x^3+3x^2+4x+5) dx$ (2) $\int_{-1}^1 (e^x-e^{-x}) dx$
 (3) $\int_{-2}^2 x\sqrt{4-x^2} dx$ (4) $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 x dx$

指針 偶関数, 奇関数と定積分 被積分関数が偶関数または奇関数であり, かつ, 下端と上端の絶対値が等しく符号が異なる場合, 偶関数, 奇関数と定積分の公式 **1**, **2** を利用して計算量を減らすことができる。

(1) 定積分の基本性質を使って 4 つの定積分の和に直してから利用する。

解答 (1) $\int_{-2}^2 (x^3 + 3x^2 + 4x + 5) dx$

$$= \int_{-2}^2 x^3 dx + \int_{-2}^2 3x^2 dx + \int_{-2}^2 4x dx + \int_{-2}^2 5 dx$$

← 定積分の性質

$$= 0 + 2 \int_0^2 3x^2 dx + 0 + 2 \int_0^2 5 dx$$

← x^3 , $4x$ は奇関数,
 $3x^2$, 5 は偶関数

$$= 2 \left[x^3 \right]_0^2 + 2 \left[5x \right]_0^2 = 16 + 20 = 36 \quad \text{答}$$

(2) $e^x - e^{-x}$ は奇関数であるから

← $e^{-x} - e^{-(-x)}$
 $= e^{-x} - e^x$
 $= -(e^x - e^{-x})$

$$\int_{-1}^1 (e^x - e^{-x}) dx = 0 \quad \text{答}$$

(3) $x\sqrt{4-x^2}$ は奇関数であるから

← $-x\sqrt{4-(-x)^2}$
 $= -x\sqrt{4-x^2}$

$$\int_{-2}^2 x\sqrt{4-x^2} dx = 0 \quad \text{答}$$

(4) $\sin^2 x$ は偶関数であるから

← $\sin^2(-x)$
 $= (-\sin x)^2$
 $= \sin^2 x$

$$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 x dx = 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 x dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1 - \cos 2x) dx$$

$$= \left[x - \frac{1}{2} \sin 2x \right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi}{2} \quad \text{答}$$

C 定積分の部分積分法

教 p.158

練習
22

次の定積分を求めよ。

(1) $\int_0^{\pi} x \sin x dx$ (2) $\int_0^1 x e^x dx$ (3) $\int_1^2 x \log x dx$

指針 定積分の部分積分法 定積分の部分積分法の公式は, 下端と上端を除けば不定積分の部分積分法の公式と同様である。利用法も同様で, 直接積分できない $f(x)g'(x)$ を, 積分しやすい $f'(x)g(x)$ に帰着させて計算する。 $g'(x)$ の選び方に注意する。

解答 (1) $\int_0^{\pi} x \sin x dx = \int_0^{\pi} x(-\cos x)' dx$

$$= \left[-x \cos x \right]_0^{\pi} + \int_0^{\pi} \cos x dx$$

$$= -\pi \cos \pi + \left[\sin x \right]_0^{\pi} = \pi \quad \text{答}$$

$$\begin{aligned}
 (2) \quad \int_0^1 x e^x dx &= \int_0^1 x(e^x)' dx = \left[x e^x \right]_0^1 - \int_0^1 e^x dx \\
 &= e - \left[e^x \right]_0^1 = e - (e - 1) = 1 \quad \text{答}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 (3) \quad \int_1^2 x \log x dx &= \int_1^2 \left(\frac{x^2}{2} \right)' \log x dx \\
 &= \left[\frac{x^2}{2} \log x \right]_1^2 - \int_1^2 \frac{x^2}{2} \cdot \frac{1}{x} dx \\
 &= 2 \log 2 - \frac{1}{2} \left[\frac{x^2}{2} \right]_1^2 = 2 \log 2 - \frac{1}{2} \left(2 - \frac{1}{2} \right) = 2 \log 2 - \frac{3}{4} \quad \text{答}
 \end{aligned}$$

練習
23

教 p.158

部分積分法によって、定積分 $\int_{-1}^1 (x+1)^3(x-1) dx$ を求めよ。

指針 定積分の部分積分法 被積分関数を $(x+1)^3$ と $x-1$ の積とみて、どちらを $g'(x)$ とすれば、定積分の部分積分法の公式の右辺の第2項 $\int_{-1}^1 f'(x)g(x) dx$ が簡単になるかを考える。

$$\begin{aligned}
 \text{解答} \quad \int_{-1}^1 (x+1)^3(x-1) dx &= \int_{-1}^1 \left\{ \frac{(x+1)^4}{4} \right\}' (x-1) dx \\
 &= \frac{1}{4} \left[(x+1)^4(x-1) \right]_{-1}^1 - \frac{1}{4} \int_{-1}^1 (x+1)^4 dx \\
 &= 0 - \frac{1}{4} \left[\frac{(x+1)^5}{5} \right]_{-1}^1 = -\frac{1}{4} \cdot \frac{2^5}{5} = -\frac{8}{5} \quad \text{答}
 \end{aligned}$$

練習
24

教 p.158

部分積分法を2回利用して、定積分 $\int_0^{\frac{\pi}{2}} x^2 \sin x dx$ を求めよ。

指針 部分積分法(2回適用) 公式で $f(x)=x^2$, $g'(x)=(-\cos x)'$ とする。部分積分法を2回適用すると、被積分関数が三角関数のみになる。

$$\begin{aligned}
 \text{解答} \quad \int_0^{\frac{\pi}{2}} x^2 \sin x dx &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} x^2 (-\cos x)' dx \\
 &= \left[-x^2 \cos x \right]_0^{\frac{\pi}{2}} + \int_0^{\frac{\pi}{2}} 2x \cos x dx \\
 &= 0 + 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} x (\sin x)' dx = 2 \left[x \sin x \right]_0^{\frac{\pi}{2}} - 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x dx \\
 &= \pi + 2 \left[\cos x \right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \pi - 2 \quad \text{答}
 \end{aligned}$$

5
章

積分法とその応用

研究 定積分 $\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^x \sin x dx$

まとめ

定積分 $\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^x \sin x dx$

定積分 $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^x \sin x dx$ は、部分積分法を2回適用すると I と同じ式が現れることから求めることができる。

練習
1

教 p.159

定積分 $J = \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^x \cos x dx$ を求めよ。

指針 定積分 $\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^x \cos x dx$ 部分積分法を2回適用する。1回目の部分積分では、公式で $f(x) = \cos x$, $g'(x) = (e^x)'$ とおく。

$$\begin{aligned}
 \text{解答 } J &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} (e^x)' \cos x dx = \left[e^x \cos x \right]_0^{\frac{\pi}{2}} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^x (-\sin x) dx \\
 &= -1 + \int_0^{\frac{\pi}{2}} (e^x)' \sin x dx \\
 &= -1 + \left[e^x \sin x \right]_0^{\frac{\pi}{2}} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^x \cos x dx \\
 &= -1 + e^{\frac{\pi}{2}} - J
 \end{aligned}$$

これより、 $2J = e^{\frac{\pi}{2}} - 1$ であるから $J = \frac{e^{\frac{\pi}{2}} - 1}{2}$ 答

6 定積分のいろいろな問題

まとめ

1 定積分と導関数

a が定数のとき $\frac{d}{dx} \int_a^x f(t) dt = f(x)$

2 定積分を含む関数の決定

$f(x) = x + \int_a^\beta f(t)g(t) dt$ のような形で表された関数 $f(x)$ を決定するには、

$\int_a^\beta f(t)g(t) dt$ が定数であることに着目して、 $f(x) = x + a$ において調べるとよい。

3 区分求積法

図形の面積や体積を、分割した部分の面積や体積の和の極限值として求める方法を 区分求積法 という。

4 区分求積法と定積分

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n f(x_k) \Delta x = \int_a^b f(x) dx$$

ただし、 $\Delta x = \frac{b-a}{n}$, $x_k = a + k\Delta x$

とくに $a=0$, $b=1$ とすると、次の等式が成り立つ。

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n f\left(\frac{k}{n}\right) = \int_0^1 f(x) dx \quad \leftarrow \Delta x = \frac{1}{n}, x_k = \frac{k}{n}$$

5 定積分と不等式

区間 $[a, b]$ で連続な関数 $f(x)$ について

$$f(x) \geq 0 \quad \text{ならば} \quad \int_a^b f(x) dx \geq 0$$

等号は、常に $f(x)=0$ のときに成り立つ。

さらに、次のことが成り立つ。

区間 $[a, b]$ で連続な関数 $f(x)$, $g(x)$ について

$$f(x) \geq g(x) \quad \text{ならば} \quad \int_a^b f(x) dx \geq \int_a^b g(x) dx$$

等号は、常に $f(x)=g(x)$ のときに成り立つ。

5 章

積分法とその応用

A 定積分で表された関数

教 p.161

練習
25次の関数を x で微分せよ。ただし、(2) では $x > 0$ とする。

(1) $\int_0^x \sin t \, dt$

(2) $\int_1^x t \log t \, dt$

指針 定積分と導関数 定積分と導関数の公式を用いる。定積分の計算は必要ない。

解答 (1) $\frac{d}{dx} \int_0^x \sin t \, dt = \sin x$ 答

(2) $\frac{d}{dx} \int_1^x t \log t \, dt = x \log x$ 答

練習
26

教 p.161

関数 $G(x) = \int_0^x (x-t)e^t \, dt$ について、 $G'(x)$ および $G''(x)$ を求めよ。指針 定積分と導関数 練習 25 と異なる点は、被積分関数に x が含まれていることである。安易に定積分と導関数の公式を使わないこと。

右辺の定積分の積分変数は t であるから、 t と異なる x は定数として扱う。まずかっこをはずして、 x を含む定積分と x を含まない定積分の 2 つに分ける。後者は公式がそのまま使えるが、前者は積の導関数を考えることになる。

解答 $G(x) = x \int_0^x e^t \, dt - \int_0^x t e^t \, dt$ であるから

← 第 1 項は x と x
の関数 $\int_0^x e^t \, dt$
の積である。

$$G'(x) = (x)' \int_0^x e^t \, dt + x \left(\frac{d}{dx} \int_0^x e^t \, dt \right) - \frac{d}{dx} \int_0^x t e^t \, dt$$

$$= \int_0^x e^t \, dt + x e^x - x e^x = \left[e^t \right]_0^x = e^x - 1$$
 答

$G''(x) = e^x$ 答

練習
27

教 p.162

関数 $\int_x^{3x} t \cos t \, dt$ を x で微分せよ。指針 定積分と導関数 定積分の上端だけでなく、下端にも x が含まれている。この場合、 $F'(t) = t \cos t$ とすると

$$\int_x^{3x} t \cos t \, dt = \left[F(t) \right]_x^{3x} = F(3x) - F(x)$$

である。このように変形してから両辺を x で微分する。解答 $F'(t) = t \cos t$ とすると

$$\int_x^{3x} t \cos t \, dt = \left[F(t) \right]_x^{3x} = F(3x) - F(x)$$

$$\begin{aligned}
 \text{よって} \quad \frac{d}{dx} \int_x^{3x} t \cos t \, dt &= \frac{d}{dx} \{F(3x) - F(x)\} \\
 &= F'(3x) \cdot (3x)' - F'(x) \\
 &= 3x \cos 3x \cdot 3 - x \cos x \\
 &= 9x \cos 3x - x \cos x \quad \boxed{\text{答}}
 \end{aligned}$$

定積分と導関数の公式の導き方を利用するんだね。



練習
28

等式 $f(x) = x + \int_0^1 f(t)e^t \, dt$ を満たす関数 $f(x)$ を求めよ。

教 p.162

5
章

積分法とその応用

指針 定積分を含む関数の決定 定積分 $\int_0^1 f(t)e^t \, dt$ は定数であるから, $\int_0^1 f(t)e^t \, dt = a$ とおき, これに $f(x) = x + a$ を代入して, a についての方程式を導く。

解答 $\int_0^1 f(t)e^t \, dt = a$ とおくと $f(x) = x + a \quad \dots\dots \textcircled{1}$

$$\begin{aligned}
 \text{よって} \quad \int_0^1 f(t)e^t \, dt &= \int_0^1 (t+a)e^t \, dt = \int_0^1 (t+a)(e^t)' \, dt \\
 &= \left[(t+a)e^t \right]_0^1 - \int_0^1 (t+a)'e^t \, dt = (1+a)e - a - \int_0^1 e^t \, dt \\
 &= (1+a)e - a - \left[e^t \right]_0^1 = (1+a)e - a - (e-1) \\
 &= ae - a + 1
 \end{aligned}$$

これより, $ae - a + 1 = a$ であるから

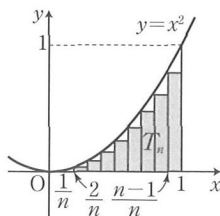
$$(e-2)a = -1 \quad \text{すなわち} \quad a = \frac{1}{2-e}$$

これを①に代入して $f(x) = x + \frac{1}{2-e} \quad \boxed{\text{答}}$

B 定積分と和の極限

練習
29

教科書 163 ページの S_n の代わりに、右の図の長方形の面積の和 T_n を考えても、
 $\lim_{n \rightarrow \infty} T_n = S$ となることを示せ。



指針 定積分と和の極限 S_n が実際の面積 S より大きく見積もったのに対し、 T_n は S より小さく見積もっている。しかし、いずれの場合においても、
 $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \lim_{n \rightarrow \infty} T_n = S$ となることを示す。

T_n は、横の長さが $\frac{1}{n}$ で、縦の長さが $0, \left(\frac{1}{n}\right)^2, \left(\frac{2}{n}\right)^2, \dots, \left(\frac{n-1}{n}\right)^2$ である n 個 [実際は $(n-1)$ 個] の長方形の面積の和として表される。

解答

$$\begin{aligned} T_n &= 0 \cdot \frac{1}{n} + \left(\frac{1}{n}\right)^2 \cdot \frac{1}{n} + \left(\frac{2}{n}\right)^2 \cdot \frac{1}{n} + \dots + \left(\frac{n-1}{n}\right)^2 \cdot \frac{1}{n} \\ &= \frac{1}{n} \left\{ \left(\frac{1}{n}\right)^2 + \left(\frac{2}{n}\right)^2 + \dots + \left(\frac{n-1}{n}\right)^2 \right\} \\ &= \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n-1} \left(\frac{k}{n}\right)^2 = \frac{1}{n^3} \sum_{k=1}^{n-1} k^2 = \frac{1}{n^3} \cdot \frac{1}{6} (n-1) \{ (n-1) + 1 \} \{ 2(n-1) + 1 \} \\ &= \frac{1}{n^3} \cdot \frac{1}{6} (n-1) n (2n-1) \end{aligned}$$

であるから $\lim_{n \rightarrow \infty} T_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{6} \left(1 - \frac{1}{n} \right) \left(2 - \frac{1}{n} \right) = \frac{1}{3} = S$ 終

練習
30

極限值 $S = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^5} (1^4 + 2^4 + 3^4 + \dots + n^4)$ を求めよ。

指針 区分求積法と定積分 教科書の応用例題 6 と同様に、 $\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n f\left(\frac{k}{n}\right)$ の形を作ることを考える。 $\frac{1}{n^5}$ を $\frac{1}{n}$ と $\frac{1}{n^4}$ に分け、 $\frac{1}{n^4}$ を各項に掛ける。

解答

$$\begin{aligned} S &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \cdot \frac{1}{n^4} (1^4 + 2^4 + 3^4 + \dots + n^4) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \left\{ \left(\frac{1}{n}\right)^4 + \left(\frac{2}{n}\right)^4 + \left(\frac{3}{n}\right)^4 + \dots + \left(\frac{n}{n}\right)^4 \right\} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \left(\frac{k}{n}\right)^4 \end{aligned}$$

ここで、 $f(x) = x^4$ とすると

$$S = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n f\left(\frac{k}{n}\right) = \int_0^1 f(x) dx = \int_0^1 x^4 dx = \left[\frac{x^5}{5} \right]_0^1 = \frac{1}{5} \quad \text{答}$$

教 p.165

C 定積分と不等式

教 p.166

練習
31

次のことを示せ。

$$(1) \quad x \geq 0 \text{ のとき} \quad \frac{1}{x+1} \geq \frac{1}{x^2+x+1}$$

$$(2) \quad \log 2 > \int_0^1 \frac{dx}{x^2+x+1}$$

指針 定積分と不等式 (1) 各辺の逆数 $x+1$, x^2+x+1 の大小から導く。

(2) (1) の不等式の両辺をそれぞれ区間 $[0, 1]$ で積分しても、不等号の向きは変わらない。ただし、等号は成り立たないことをはじめに示しておく。

解答 (1) $x \geq 0$ のとき $x+1 \leq x^2+x+1$

$$\text{両辺とも正なので、逆数をとって} \quad \frac{1}{x+1} \geq \frac{1}{x^2+x+1} \quad \text{終}$$

(2) (1) の不等式では、常には $\frac{1}{x+1} = \frac{1}{x^2+x+1}$ でないから

$$\int_0^1 \frac{dx}{x+1} > \int_0^1 \frac{dx}{x^2+x+1}$$

← 等号は成り立たない。

$$\text{左辺は} \quad \int_0^1 \frac{dx}{x+1} = \left[\log|x+1| \right]_0^1 = \log 2$$

$$\text{よって} \quad \log 2 > \int_0^1 \frac{dx}{x^2+x+1} \quad \text{終}$$

5
章

積分法とその応用

深
め
る

教 p.166

教科書の例題 11 (2) の解答において、常には $\frac{1}{x^2+x+1} = \frac{1}{(x+1)^2}$ でないことを確かめた理由を説明してみよう。

解答 例題 11 (2) の解答では、区間 $[a, b]$ で連続な関数 $f(x)$, $g(x)$ について

$$f(x) \geq g(x) \text{ ならば } \int_a^b f(x) dx \geq \int_a^b g(x) dx$$

が成り立つことを利用している。この不等式の等号が成り立つのは、常に $f(x) = g(x)$ のときである。

よって、常には $\frac{1}{x^2+x+1} = \frac{1}{(x+1)^2}$ が成り立たないことを確かめない限りは

導かれる不等式は $\int_0^1 \frac{1}{x^2+x+1} dx \geq \int_0^1 \frac{1}{(x+1)^2} dx$ であり、

不等式 $\int_0^1 \frac{1}{x^2+x+1} dx > \int_0^1 \frac{1}{(x+1)^2} dx$ を示すことができないから。 終

練習

32

関数 $f(x) = \frac{1}{x}$ の定積分を利用して、次の不等式を証明せよ。

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n} > \log(n+1) \quad \text{ただし, } n \text{ は自然数}$$

指針 定積分と不等式 自然数 k に対して、 $k < x < k+1$ のとき

$$\frac{1}{k} > \frac{1}{x} \text{ であるから, } \int_k^{k+1} \frac{1}{k} dx > \int_k^{k+1} \frac{1}{x} dx \text{ が成り立つ。}$$

この不等式で $k=1, 2, 3, \dots, n$ として、辺々を加える。

解答 自然数 k に対して、 $k \leq x \leq k+1$ では

$$\frac{1}{k} \geq \frac{1}{x}$$

常には $\frac{1}{k} = \frac{1}{x}$ でないから

$$\int_k^{k+1} \frac{1}{k} dx > \int_k^{k+1} \frac{1}{x} dx$$

$$\text{すなわち} \quad \frac{1}{k} > \int_k^{k+1} \frac{dx}{x}$$

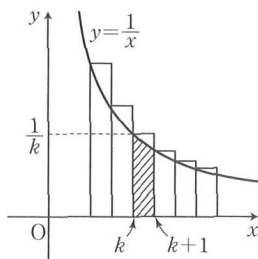
$k=1, 2, 3, \dots, n$ として、辺々を加えると

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n} > \int_1^2 \frac{dx}{x} + \int_2^3 \frac{dx}{x} + \int_3^4 \frac{dx}{x} + \cdots + \int_n^{n+1} \frac{dx}{x}$$

$$\text{ここで} \quad \text{右辺} = \int_1^{n+1} \frac{dx}{x} = \left[\log|x| \right]_1^{n+1} = \log(n+1)$$

$$\leftarrow \log 1 = 0$$

$$\text{したがって} \quad 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n} > \log(n+1) \quad \text{〔終〕}$$



区分求積法の考え方を応用して数列の和を評価する問題はグラフをかくて考えよう。



第5章 第2節

問題

教 p.168

7 次の定積分を求めよ。

$$(1) \int_1^4 \frac{1+x}{\sqrt{x}} dx \quad (2) \int_0^{\frac{\pi}{3}} \tan \theta d\theta \quad (3) \int_{-\frac{\pi}{6}}^{\pi} \cos^2 2\theta d\theta$$

$$(4) \int_0^2 \frac{x}{(3-x)^2} dx \quad (5) \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x \cos^3 x dx \quad (6) \int_1^4 \sqrt{x} \log x dx$$

指針 定積分の計算 (1) 分母で割って2つの項に分ける。

(2) $\tan \theta = \frac{\sin \theta}{\cos \theta}$ として, $\frac{g'(x)}{g(x)}$ の積分法を使う。

(3) 半角の公式で次数を下げる。

(4), (5) 置換積分法を使う。

(6) 部分積分法を使う。

解答 (1) $\int_1^4 \frac{1+x}{\sqrt{x}} dx = \int_1^4 \left(\frac{1}{\sqrt{x}} + \sqrt{x} \right) dx = \int_1^4 (x^{-\frac{1}{2}} + x^{\frac{1}{2}}) dx$

$$= \left[2x^{\frac{1}{2}} + \frac{2}{3} x^{\frac{3}{2}} \right]_1^4 = \left[2\sqrt{x} + \frac{2}{3} x\sqrt{x} \right]_1^4$$

$$= \left(2\sqrt{4} + \frac{2}{3} \cdot 4\sqrt{4} \right) - \left(2 + \frac{2}{3} \right) = \frac{20}{3} \quad \text{答}$$

(2) $\int_0^{\frac{\pi}{3}} \tan \theta d\theta = \int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{\sin \theta}{\cos \theta} d\theta = - \int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{(\cos \theta)'}{\cos \theta} d\theta$

$$= - \left[\log |\cos \theta| \right]_0^{\frac{\pi}{3}} = - \left(\log \frac{1}{2} - \log 1 \right) = \log 2 \quad \text{答}$$

(3) $\int_{-\frac{\pi}{6}}^{\pi} \cos^2 2\theta d\theta = \int_{-\frac{\pi}{6}}^{\pi} \frac{1 + \cos 4\theta}{2} d\theta = \frac{1}{2} \left[\theta + \frac{1}{4} \sin 4\theta \right]_{-\frac{\pi}{6}}^{\pi}$

$$= \frac{1}{2} \left\{ \pi - \left(-\frac{\pi}{6} - \frac{1}{4} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \right) \right\}$$

$$= \frac{7}{12} \pi + \frac{\sqrt{3}}{16} \quad \text{答}$$

(4) $3-x=t$ とおくと $x=3-t$, $dx=(-1)dt$

 x と t の対応は右のようになる。

x	$0 \rightarrow 2$
t	$3 \rightarrow 1$

よって

$$\int_0^2 \frac{x}{(3-x)^2} dx = \int_3^1 \frac{3-t}{t^2} \cdot (-1) dt$$

$$= \int_1^3 \left(\frac{3}{t^2} - \frac{1}{t} \right) dt = \left[-\frac{3}{t} - \log |t| \right]_1^3$$

$$= (-1 - \log 3) - (-3) = 2 - \log 3 \quad \text{答}$$

5章

積分法とその応用

(5) $\cos x = t$ とおくと $-\sin x dx = dt$

x と t の対応は右のようになる。

よって

$$\begin{aligned}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x \cos^3 x dx &= \int_1^0 t^3 \cdot (-1) dt = \int_0^1 t^3 dt \\ &= \left[\frac{t^4}{4} \right]_0^1 = \frac{1}{4} \quad \text{答}\end{aligned}$$

x	$0 \rightarrow \frac{\pi}{2}$
t	$1 \rightarrow 0$

(6) $\int_1^4 \sqrt{x} \log x dx = \int_1^4 \left(\frac{2}{3} x\sqrt{x} \right)' \log x dx$

$$\begin{aligned}&= \left[\frac{2}{3} x\sqrt{x} \log x \right]_1^4 - \int_1^4 \frac{2}{3} x\sqrt{x} \cdot \frac{1}{x} dx \\&= \frac{2}{3} \cdot 4\sqrt{4} \log 4 - \frac{2}{3} \int_1^4 \sqrt{x} dx \\&= \frac{16}{3} \log 4 - \frac{2}{3} \left[\frac{2}{3} x\sqrt{x} \right]_1^4 \\&= \frac{32}{3} \log 2 - \frac{4}{9} (4\sqrt{4} - 1) = \frac{32}{3} \log 2 - \frac{28}{9} \quad \text{答}\end{aligned}$$

教 p.168

8 a は正の定数とする。次の定積分を求めよ。

(1) $\int_{-a}^a x^2 \sqrt{a^2 - x^2} dx$ (2) $\int_{-a}^a \frac{x^2}{x^2 + a^2} dx$

指針 三角関数で置換する定積分 (1), (2)とも、偶関数を区間 $[-a, a]$ で積分するから、0 から a までの定積分を考えればよい。

(1)は $x = a \sin \theta$, (2)は $x = a \tan \theta$ において置換積分する。

解答 (1) $x^2 \sqrt{a^2 - x^2}$ は偶関数であるから

$$\int_{-a}^a x^2 \sqrt{a^2 - x^2} dx = 2 \int_0^a x^2 \sqrt{a^2 - x^2} dx$$

ここで、 $x = a \sin \theta$ とおくと $dx = a \cos \theta d\theta$

x と θ の対応は右のようになる。

この範囲では $\cos \theta \geq 0$ である。

また、 $a > 0$ であるから

$$x^2 \sqrt{a^2 - x^2} = a^2 \sin^2 \theta \sqrt{a^2 (1 - \sin^2 \theta)} = a^3 \sin^2 \theta \cos \theta$$

よって

$$\begin{aligned}\int_{-a}^a x^2 \sqrt{a^2 - x^2} dx &= 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} a^3 \sin^2 \theta \cos \theta \cdot a \cos \theta d\theta \\ &= 2a^4 \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin \theta \cos \theta)^2 d\theta = \frac{a^4}{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 2\theta d\theta\end{aligned}$$

x	$0 \rightarrow a$
θ	$0 \rightarrow \frac{\pi}{2}$

$$\begin{aligned}
 &= \frac{a^4}{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1 - \cos 4\theta}{2} d\theta = \frac{a^4}{4} \left[\theta - \frac{1}{4} \sin 4\theta \right]_0^{\frac{\pi}{2}} \\
 &= \frac{a^4}{4} \cdot \frac{\pi}{2} = \frac{1}{8} \pi a^4 \quad \text{答}
 \end{aligned}$$

(2) $\frac{x^2}{x^2+a^2}$ は偶関数であるから

$$\int_{-a}^a \frac{x^2}{x^2+a^2} dx = 2 \int_0^a \frac{x^2}{x^2+a^2} dx$$

ここで, $x = a \tan \theta$ とおくと $dx = \frac{a}{\cos^2 \theta} d\theta$

x と θ の対応は右のようになる。

よって

$$\begin{aligned}
 \int_{-a}^a \frac{x^2}{x^2+a^2} dx &= 2 \int_0^a \left(1 - \frac{a^2}{x^2+a^2} \right) dx \\
 &= 2 \int_0^a dx - 2 \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{a^2}{a^2(\tan^2 \theta + 1)} \cdot \frac{a}{\cos^2 \theta} d\theta \\
 &= 2a - 2a \int_0^{\frac{\pi}{4}} d\theta \\
 &= 2a \left(1 - \frac{\pi}{4} \right) \quad \text{答}
 \end{aligned}$$

x	$0 \rightarrow a$
θ	$0 \rightarrow \frac{\pi}{4}$

5章

積分法とその応用

教 p.168

9 次の関数の極値を求めよ。

$$f(x) = \int_0^x (1 + \cos t) \sin t \, dt \quad (0 < x < 4\pi)$$

指針 定積分と関数の極値 定積分を計算して $f(x)$ を求める。なお, $f(x)$ の導関数は,

定積分と導関数の公式 $\frac{d}{dx} \int_a^x g(t) \, dt = g(x)$ により,

$f'(x) = (1 + \cos x) \sin x$ と求められる。これらをもとに増減表を作り, 極値を求める。

解答

$$\begin{aligned}
 f(x) &= \int_0^x (1 + \cos t) \sin t \, dt = \int_0^x (\sin t + \cos t \sin t) \, dt \\
 &= \int_0^x \left(\sin t + \frac{1}{2} \sin 2t \right) dt = \left[-\cos t - \frac{1}{4} \cos 2t \right]_0^x \\
 &= -\cos x - \frac{1}{4} \cos 2x + \frac{5}{4}
 \end{aligned}$$

また $f'(x) = (1 + \cos x) \sin x$

$f'(x) = 0$ とすると $1 + \cos x = 0$ または $\sin x = 0$

よって, $0 < x < 4\pi$ で $x = \pi, 2\pi, 3\pi$

$f(x)$ の増減表は次のようになる。

x	0		π		2π		3π		4π
$f'(x)$	$\nearrow$	+	0	-	0	+	0	-	$\searrow$
$f(x)$	$\nearrow$	$\nearrow$	極大 2	$\searrow$	極小 0	$\nearrow$	極大 2	$\searrow$	$\searrow$

したがって $x=\pi, 3\pi$ で極大値 2,

$x=2\pi$ で極小値 0 をとる。 答

教 p.168

10 次の関数を x で微分せよ。ただし、(2)では $x>0$ とする。

$$(1) \int_x^{2x} \cos \theta \, d\theta$$

$$(2) \int_x^{x^2} \log t \, dt$$

指針 定積分と導関数 公式 $\frac{d}{dx} \int_a^x f(t) \, dt = f(x)$ は、下端 a が定数のとき成り立つ。

本問のように、下端、上端ともに x が含まれる場合は適用できないが、公式を導いた考え方(教科書 p.161)は利用できる。

被積分関数の原始関数の 1 つを $F(\theta)$, $F(t)$ などとおけば、定積分を計算しなくても答えが得られる。

解答 (1) $F'(\theta) = \cos \theta$ とおくと

$$\int_x^{2x} \cos \theta \, d\theta = F(2x) - F(x)$$

$$\begin{aligned} \text{よって } \frac{d}{dx} \int_x^{2x} \cos \theta \, d\theta &= \frac{d}{dx} \{F(2x) - F(x)\} \\ &= 2F'(2x) - F'(x) \\ &= 2\cos 2x - \cos x \quad \text{答} \end{aligned}$$

(2) $F'(t) = \log t$ とおくと

$$\int_x^{x^2} \log t \, dt = F(x^2) - F(x)$$

$$\begin{aligned} \text{よって } \frac{d}{dx} \int_x^{x^2} \log t \, dt &= \frac{d}{dx} \{F(x^2) - F(x)\} \\ &= 2xF'(x^2) - F'(x) \\ &= 2x \log x^2 - \log x \\ &= (4x-1) \log x \quad \text{答} \end{aligned}$$

教 p.168

11 等式 $f(x) = \sin x + \int_0^{\frac{\pi}{4}} f(t) \cos t \, dt$ を満たす関数 $f(x)$ を求めよ。

指針 関数の決定 $\int_0^{\frac{\pi}{4}} f(t) \cos t \, dt = a$ とおく。

このとき $f(x) = \sin x + a$ と表されるので、これを上の式に代入すれば、 a につ

いての方程式が得られる。

解答 $f(x)$ の第2項は定数であるから

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} f(t) \cos t \, dt = a$$

とおく。このとき、 $f(x) = \sin x + a$ …… ① と表されるから

$$\begin{aligned} \int_0^{\frac{\pi}{4}} f(t) \cos t \, dt &= \int_0^{\frac{\pi}{4}} (\sin t + a) \cos t \, dt \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{4}} (\sin t \cos t + a \cos t) \, dt \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \left(\frac{\sin 2t}{2} + a \cos t \right) \, dt \\ &= \left[-\frac{1}{4} \cos 2t + a \sin t \right]_0^{\frac{\pi}{4}} \\ &= \frac{a}{\sqrt{2}} + \frac{1}{4} \end{aligned}$$

よって $\frac{1}{\sqrt{2}}a + \frac{1}{4} = a$

$$\frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}}a = \frac{1}{4} \text{ から } a = \frac{\sqrt{2}}{4(\sqrt{2}-1)} = \frac{2+\sqrt{2}}{4}$$

これを①に代入して $f(x) = \sin x + \frac{2+\sqrt{2}}{4}$ 図

教 p.168

12 次の極限値を求めよ。

$$S = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\sqrt{\frac{1}{n^3}} + \sqrt{\frac{2}{n^3}} + \sqrt{\frac{3}{n^3}} + \cdots + \sqrt{\frac{n}{n^3}} \right)$$

指針 区分求積法と定積分 数列の和の極限値を求めるときに、区分求積法の考え方が利用できる場合がある。

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n f\left(\frac{k}{n}\right) = \int_0^1 f(x) \, dx \quad \cdots \cdots \text{①}$$

$\sqrt{\frac{k}{n^3}} = \frac{1}{n} \sqrt{\frac{k}{n}}$ であるから、 $f(x) = \sqrt{x}$ を考えると、数列の和は①の左辺の

の形に変形されるので、求める極限値は $\int_0^1 \sqrt{x} \, dx$ に等しい。

解答
$$\begin{aligned} S &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \left(\sqrt{\frac{1}{n}} + \sqrt{\frac{2}{n}} + \sqrt{\frac{3}{n}} + \cdots + \sqrt{\frac{n}{n}} \right) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \sqrt{\frac{k}{n}} \end{aligned}$$

ここで、 $f(x) = \sqrt{x}$ とすると

$$S = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n f\left(\frac{k}{n}\right) = \int_0^1 f(x) \, dx$$

$$= \int_0^1 \sqrt{x} \, dx = \left[\frac{2}{3} x^{\frac{3}{2}} \right]_0^1 = \frac{2}{3} \quad \text{答}$$

13 連続な関数 $f(x)$ について, $\int_a^b f(a+b-x) \, dx = \int_a^b f(x) \, dx$ を証明せよ。

指針 置換積分法の利用 $a+b-x=t$ とおく。

解答 $a+b-x=t$ とおくと

$$x = a+b-t, \quad dx = (-1) \, dt$$

x と t の対応は右のようになる。

よって

$$\begin{aligned} \int_a^b f(a+b-x) \, dx &= \int_b^a f(t) \cdot (-1) \, dt \\ &= \int_a^b f(t) \, dt \\ &= \int_a^b f(x) \, dx \quad \text{答} \end{aligned}$$

x	$a \rightarrow b$
t	$b \rightarrow a$

第3節 積分法の実用

7 面積

まとめ

1 曲線 $y=f(x)$ と面積

区間 $[a, b]$ で常に $f(x) \geq 0$ のとき、曲線 $y=f(x)$ と x 軸および2直線 $x=a$, $x=b$ で囲まれた部分の面積 S は

$$S = \int_a^b f(x) dx$$

上の公式において、区間 $[a, b]$ で常に $f(x) \leq 0$ のとき、 S は次の式で表される。

$$S = \int_a^b \{-f(x)\} dx$$

2 2曲線間の面積

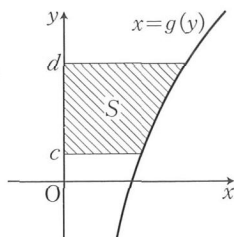
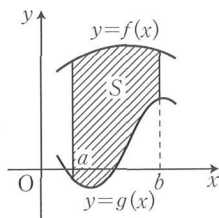
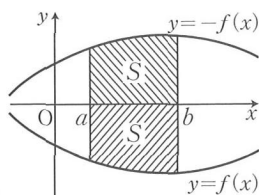
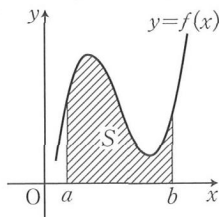
区間 $[a, b]$ で常に $f(x) \geq g(x)$ のとき、2つの曲線 $y=f(x)$, $y=g(x)$ と2直線 $x=a$, $x=b$ で囲まれた部分の面積 S は

$$S = \int_a^b \{f(x) - g(x)\} dx$$

3 曲線 $x=g(y)$ と面積

区間 $c \leq y \leq d$ で常に $g(y) \geq 0$ のとき、曲線 $x=g(y)$ と y 軸および2直線 $y=c$, $y=d$ で囲まれた部分の面積 S は

$$S = \int_c^d g(y) dy$$



5 章

積分法とその応用

A 曲線 $y=f(x)$ と面積

教 p.169

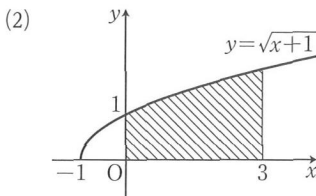
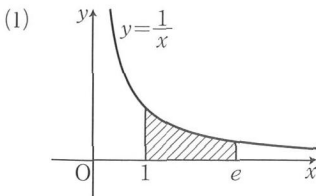
練習
33次の曲線と2直線、および x 軸で囲まれた部分の面積 S を求めよ。

$$(1) \quad y = \frac{1}{x}, \quad x=1, \quad x=e \qquad (2) \quad y = \sqrt{x+1}, \quad x=0, \quad x=3$$

指針 曲線 $y=f(x)$ と面積 グラフの概形をかき、曲線と x 軸の位置関係を確認してから、定積分によって面積を求める。

解答 (1) $S = \int_1^e \frac{1}{x} dx = \left[\log|x| \right]_1^e = 1$ 答

$$(2) \quad S = \int_0^3 \sqrt{x+1} dx = \left[\frac{2}{3}(x+1)\sqrt{x+1} \right]_0^3 \\ = \frac{2}{3}(4\sqrt{4}-1) = \frac{14}{3} \quad \text{答}$$

練習
34

教 p.169

曲線 $y=e^x-e$ と x 軸および2直線 $x=0, x=2$ で囲まれた2つの部分の面積の和 S を求めよ。

指針 曲線 $y=f(x)$ と面積 曲線と x 軸の共有点の座標に注意して、グラフの概形をかき、どの部分の面積を求めればよいか調べる。

定積分の下端と上端を決め、曲線 $y=f(x)$ が x 軸より下側にある部分の被積分関数は $-f(x)$ とする。

解答 この曲線と x 軸の共有点の x 座標は、

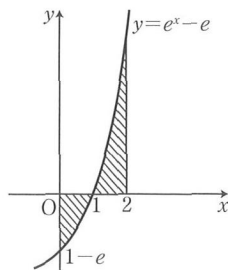
方程式 $e^x-e=0$ を解いて $x=1$

区間 $0 \leq x \leq 1$ では、常に $y \leq 0$,

区間 $1 \leq x \leq 2$ では、常に $y \geq 0$

であるから、求める面積の和 S は

$$S = \int_0^1 \{-(e^x-e)\} dx + \int_1^2 (e^x-e) dx \\ = -\left[e^x - ex \right]_0^1 + \left[e^x - ex \right]_1^2 \\ = -\{(e-e)-1\} + (e^2-2e)-(e-e) \\ = e^2-2e+1 \quad \text{答}$$



練習
35次の曲線と直線で囲まれた部分の面積 S を求めよ。

(1) $y=x^2$, $y=\sqrt{x}$ (2) $x+4y=5$, $xy=1$

指針 2 曲線間の面積 2つの曲線の共有点の x 座標を求めて、積分する区間を決定し、その区間での曲線の上下関係を確認してから、2つの曲線の間の面積の公式を利用する。

解答 (1) 2つの曲線の共有点の x 座標は方程式

$$x^2 = \sqrt{x} \text{ の解を求めて}$$

$$x=0, 1$$

区間 $0 \leq x \leq 1$ では、 $\sqrt{x} \geq x^2$ であるから求める面積 S は

$$\begin{aligned} S &= \int_0^1 (\sqrt{x} - x^2) dx \\ &= \left[\frac{2}{3} x^{\frac{3}{2}} - \frac{x^3}{3} \right]_0^1 = \frac{2}{3} - \frac{1}{3} = \frac{1}{3} \quad \text{答} \end{aligned}$$

(2) 2つの方程式を y について解くと、それぞれ

$$y = -\frac{1}{4}x + \frac{5}{4}, \quad y = \frac{1}{x}$$

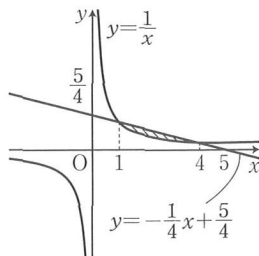
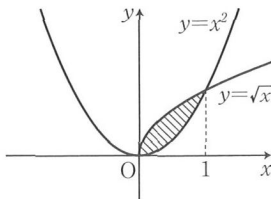
よって、直線と曲線の共有点の x 座標は方程

$$\text{式 } -\frac{1}{4}x + \frac{5}{4} = \frac{1}{x} \text{ すなわち } x^2 - 5x + 4 = 0 \text{ を解いて } x=1, 4$$

区間 $1 \leq x \leq 4$ では、 $-\frac{1}{4}x + \frac{5}{4} \geq \frac{1}{x}$ であるか

ら、求める面積 S は

$$\begin{aligned} S &= \int_1^4 \left(-\frac{1}{4}x + \frac{5}{4} - \frac{1}{x} \right) dx = \left[-\frac{x^2}{8} + \frac{5}{4}x - \log|x| \right]_1^4 \\ &= (-2 + 5 - \log 4) - \left(-\frac{1}{8} + \frac{5}{4} \right) = \frac{15}{8} - 2\log 2 \quad \text{答} \end{aligned}$$

5
章

積分法とその応用

B 曲線 $x=g(y)$ と面積練習
36次の曲線と直線で囲まれた部分の面積 S を求めよ。

(1) $x=y^2+1$, x 軸, y 軸, $y=2$ (2) $x=y^2-1$, $x=y+5$

指針 曲線 $x=g(y)$ と面積 y の関数 $x=g(y)$ で表される曲線と x 軸に平行な 2 直線、 y 軸が囲む部分の面積は本書 p.221 のまとめの 3 のように y を積分変数とする定積分によって求められる。

また、2 曲線 $x=f(y)$, $x=g(y)$ と 2 直線 $y=c$, $y=d$ で囲まれる部分の面積も、
 区間 $c \leq y \leq d$ で常に $f(y) \geq g(y)$ ならば $S = \int_c^d \{f(y) - g(y)\} dy$

として求めることができる。

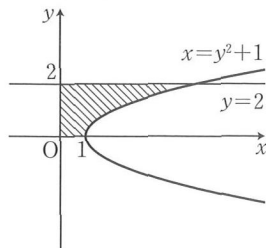
(2) まず放物線と直線の共有点の y 座標を求めてグラフをかき、どの部分の面積を求めるか確認する。曲線の位置関係はたとえば、

「 $f(y) \geq g(y) \iff x=f(y)$ は $x=g(y)$ の右側 (共有点を含む)」となる。

解答 (1) 常に $y^2+1 > 0$ であるから、求める面積 S は

$$S = \int_0^2 (y^2+1) dy$$

$$= \left[\frac{y^3}{3} + y \right]_0^2 = \frac{14}{3} \quad \text{答}$$



(2) 放物線と直線の共有点の y 座標は、

方程式 $y^2 - 1 = y + 5$ すなわち

$y^2 - y - 6 = 0$ を解いて $y = -2, 3$

区間 $-2 \leq y \leq 3$ では、常に

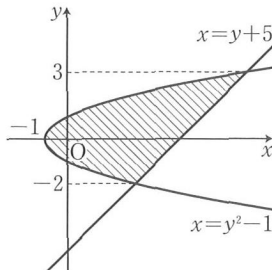
$$y+5 \geq y^2-1$$

であるから、求める面積 S は

$$S = \int_{-2}^3 \{(y+5) - (y^2-1)\} dy$$

$$= \int_{-2}^3 (-y^2 + y + 6) dy = \left[-\frac{y^3}{3} + \frac{y^2}{2} + 6y \right]_{-2}^3$$

$$= \left(-9 + \frac{9}{2} + 18 \right) - \left(\frac{8}{3} + 2 - 12 \right) = \frac{125}{6} \quad \text{答}$$



C いろいろな式で表される曲線と面積

教 p.172

練習
37

曲線 $4x^2 + 2y^2 = 1$ で囲まれた部分の面積 S を求めよ。

指針 曲線で囲まれた図形の面積 曲線 $4x^2 + 2y^2 = 1$ は楕円であり、 x 軸に関して対称である。 $y \geq 0$ のとき、方程式を y について解き、 $y \geq 0$ の部分を 2 倍すればよい。また、定積分 $\int_{-a}^a \sqrt{a^2 - x^2} dx$ ($a > 0$) は半径 a の円の面積 πa^2 の半分であるから $\frac{1}{2} \pi a^2$ である。

解答 曲線 $4x^2 + 2y^2 = 1$ は図のような楕円である。よって、求める面積 S は図の斜線部分の面積を 2 倍したものに等しい。

$y \geq 0$ のとき、方程式を y について解くと

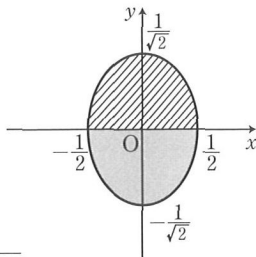
$$y = \sqrt{\frac{1-4x^2}{2}} = \sqrt{2} \sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2 - x^2}$$

ゆえに

$$S = 2 \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \sqrt{2} \sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2 - x^2} dx = 2\sqrt{2} \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2 - x^2} dx$$

ここで、 $\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2 - x^2} dx$ は、半径 $\frac{1}{2}$ の円の面積の半分である。

$$\text{したがって } S = 2\sqrt{2} \cdot \frac{1}{2} \pi \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{\sqrt{2}}{4} \pi \quad \text{答}$$



練習
38

次の曲線と x 軸で囲まれた部分の面積 S を求めよ。

$$x = 3 \cos \theta, \quad y = 2 \sin \theta \quad (0 \leq \theta \leq \pi)$$

教 p.173

指針 媒介変数表示の曲線と面積 まず曲線と x 軸の共有点の x 座標を求める。 $y=0$ となる θ の値を求め、その値を x の式に代入すればよい。その共有点の座標を $(a, 0)$, $(b, 0)$ ($a < b$) とすると、区間 $[a, b]$ で $y \geq 0$ ならば、面積 S は $S = \int_a^b y dx$ ($y \leq 0$ ならば $S = \int_a^b (-y) dx$) で求めることができる。 x, y の媒介変数表示をそのまま使い、置換積分法によって計算するとよい。

解答 $0 \leq \theta \leq \pi$ において $y=0$ となる θ の値は

$$2 \sin \theta = 0 \quad \text{より} \quad \theta = 0, \pi$$

$\theta=0$ のとき $x=3$, $\theta=\pi$ のとき $x=-3$ であり、 $0 \leq \theta \leq \pi$ の範囲では $y \geq 0$ であるから、求める面積 S は

$$S = \int_{-3}^3 y dx$$

また、 $x = 3 \cos \theta$ より

$$dx = -3 \sin \theta d\theta$$

で、 x と θ の対応は右ようになる。

よって、置換積分法により

$$\begin{aligned} S &= \int_{-3}^3 y dx = \int_{\pi}^0 2 \sin \theta \cdot (-3 \sin \theta) d\theta \\ &= 6 \int_0^{\pi} \sin^2 \theta d\theta = 3 \int_0^{\pi} (1 - \cos 2\theta) d\theta \\ &= 3 \left[\theta - \frac{1}{2} \sin 2\theta \right]_0^{\pi} = 3\pi \quad \text{答} \end{aligned}$$

x	$-3 \rightarrow 3$
θ	$\pi \rightarrow 0$

$$\begin{aligned} &\leftarrow \int_b^a f(x) dx \\ &= - \int_a^b f(x) dx \end{aligned}$$

5
章

積分法とその応用

8 体積

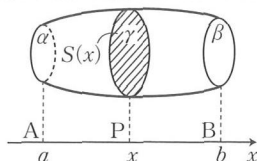
まとめ

1 断面積 $S(x)$ と立体の体積 V

右の図のような、 x 軸に垂直な 2 平面 α, β に挟まれた立体の体積を V とする。

2 平面 α, β と x 軸との交点 A, B の座標を、それぞれ a, b とする。ただし、 $a < b$ である。

座標が x である点 P を通り、 x 軸に垂直な平面 γ で立体を切ったときの断面積を $S(x)$ とすると、体積 V は次の式で与えられる。

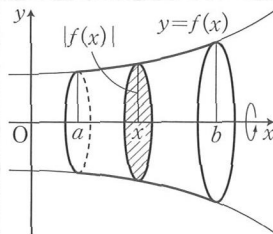


$$V = \int_a^b S(x) dx \quad \text{ただし, } a < b$$

2 x 軸の周りの回転体の体積

曲線 $y=f(x)$ と x 軸および 2 直線 $x=a, x=b$ で囲まれた部分が、 x 軸の周りに 1 回転してできる回転体の体積 V は

$$V = \pi \int_a^b \{f(x)\}^2 dx = \pi \int_a^b y^2 dx \quad \text{ただし, } a < b$$

3 y 軸の周りの回転体の体積

曲線 $x=g(y)$ と y 軸および 2 直線 $y=c, y=d$ で囲まれた部分が、 y 軸の周りに 1 回転してできる回転体の体積を V とすると

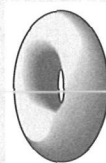
$$V = \pi \int_c^d \{g(y)\}^2 dy = \pi \int_c^d x^2 dy \quad \text{ただし, } c < d$$

4 円環体の体積

$0 < r < a$ とする。円 $x^2 + (y-a)^2 = r^2$ が x 軸の周りに 1 回転してできる回転体の体積 V は、半円 $y = a + \sqrt{r^2 - x^2}$ と x 軸および 2 直線 $x=-r, x=r$ で囲まれた部分が x 軸の周りに 1 回転してできる回転体の体積を V_1 、半円 $y = a - \sqrt{r^2 - x^2}$ と x 軸および 2 直線 $x=-r, x=r$ で囲まれた部分が x 軸の周りに 1 回転してできる回転体の体積を V_2 とすると、 $V = V_1 - V_2$ である。

この回転体を 円環体 (トーラス) という。

この円環体の体積は、円 $x^2 + (y-a)^2 = r^2$ の面積 πr^2 と、この円が x 軸の周りに回転するとき中心の点が描く円の周の長さ $2\pi a$ との積に等しい。



5 媒介変数表示された曲線と回転体の体積

媒介変数表示された曲線で作られた図形の回転体の体積を求めるには、まず、体積を x についての定積分で表し、置換積分法によって、媒介変数についての定積分に変える。

A 定積分と体積

教 p.175

練習

39

底面の半径が r 、高さが h の円錐の体積 V は、 $V = \frac{1}{3} \pi r^2 h$ で与えられることを示せ。

指針 円錐の体積と定積分 断面積 $S(x)$ と立体の体積 V の公式を次の手順で利用する。

① x 軸を定める ② 断面積 $S(x)$ を求める ③ 定積分を計算する
 $S(x)$ が表しやすくなるように x 軸をとることがポイントとなる。

円錐では、頂点から底面に下ろした垂線を x 軸にするとよい。これと垂直な平面で切ったときの断面は底面と相似な図形になる。相似比と面積比の関係を利用して $S(x)$ を表す。

解答 この円錐の頂点から底面に垂線を下ろし、これを x 軸とし、頂点を原点 O にとる。座標が x である点を通り x 軸に垂直な平面で円錐を切ったときの断面積を $S(x)$ とする。

この断面は円であり、底面の円と相似である。

また、底面の面積を S とすると、 $S = \pi r^2$ である。

断面と底面の相似比は $x : h$ であるから、面積比は

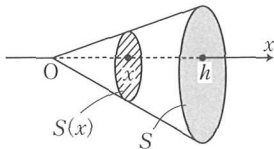
$$S(x) : S = x^2 : h^2$$

$$\text{よって} \quad S(x) = \frac{S}{h^2} x^2$$

$$\text{したがって} \quad V = \int_0^h S(x) dx = \int_0^h \frac{S}{h^2} x^2 dx$$

$$= \frac{S}{h^2} \left[\frac{x^3}{3} \right]_0^h = \frac{S}{h^2} \cdot \frac{h^3}{3}$$

$$= \frac{1}{3} Sh = \frac{1}{3} \pi r^2 h \quad \text{終}$$

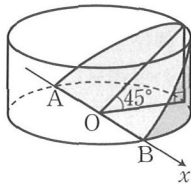


5 章

積分法とその応用

練習
40

底面の半径が a で高さも a である直円柱がある。この底面の直径 AB を含み底面と 45° の傾きをなす平面で、直円柱を2つの立体に分けると、小さい方の立体の体積 V を求めよ。



教 p.176

指針 断面積 $S(x)$ と立体の体積 V 図にあるように x 軸を定めると、これに垂直な平面で題意の立体を切ったときの断面は直角二等辺三角形になる。座標が x である点を頂点とする断面の面積 $S(x)$ を x で表し、定積分する。底面の中心を原点にとれば、積分する区間は $[-a, a]$ となる。

解答 底面の円の中心 O を原点に、直径 AB を x 軸にとる。

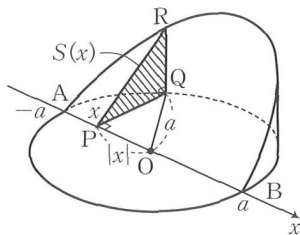
直径 AB 上の座標が x である点 P を通り x 軸に垂直な平面で立体を切ったときの断面を、図のように、 $\triangle PQR$ とし、断面積を $S(x)$ とする。 $\angle RPQ = 45^\circ$ であるから、 $\triangle PQR$ は直角二等辺三角形である。

$$\text{また } PQ = \sqrt{OQ^2 - OP^2} = \sqrt{a^2 - x^2}$$

$$\text{よって } S(x) = \frac{1}{2}(\sqrt{a^2 - x^2})^2 = \frac{1}{2}(a^2 - x^2)$$

したがって、求める体積 V は

$$\begin{aligned} V &= \int_{-a}^a \frac{1}{2}(a^2 - x^2) dx = \int_0^a (a^2 - x^2) dx \\ &= \left[a^2x - \frac{x^3}{3} \right]_0^a = \frac{2}{3}a^3 \quad \text{答} \end{aligned}$$



面積を求めやすい断面になるように切るのがコツ。

深
め
る

練習 40 の立体 (体積を求める立体) を、いろいろな平面で切ってみよう。それぞれの平面で切ったときの断面はどのような図形になるだろうか。

- 解答**
- ① 直線 AB に垂直な平面で切ったとき：直角二等辺三角形
 - ② 底面の中心 O を通り直線 AB に垂直な底面上の直線について、この直線に垂直な平面で切ったとき：長方形
 - ③ 底面に平行な平面で切ったとき：弓のような形

など 図

補足 ①～③においては、次のようにして体積 V が求められる。

$$\textcircled{1} \quad V = \int_{-a}^a \frac{1}{2}(a^2 - x^2) dx = \left[a^2 x - \frac{x^3}{3} \right]_0^a = \frac{2}{3} a^3$$

② 練習 40 の 解答 の図において、 $PQ=y$ とおくと

$$V = \int_0^a 2y\sqrt{a^2 - y^2} dy = \left[-\frac{2}{3}(a^2 - y^2)^{\frac{3}{2}} \right]_0^a = \frac{2}{3} a^3$$

③ (底面から断面の距離を h とし

$h = a \cos \theta$ と置換するなどすると)

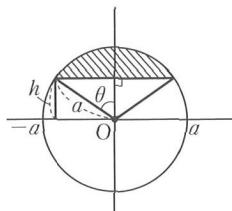
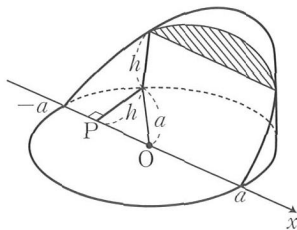
$$V = \int_{\frac{\pi}{2}}^0 \left(a^2 \theta - \frac{1}{2} a^2 \sin 2\theta \right) \cdot (-a \sin \theta) d\theta$$

$$= a^3 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\theta \sin \theta - \frac{1}{2} \sin 2\theta \sin \theta \right) d\theta$$

$$= a^3 \left[-\theta \cos \theta + \sin \theta \right]$$

$$- \left(\frac{1}{4} \sin \theta - \frac{1}{12} \sin 3\theta \right) \Bigg|_0^{\frac{\pi}{2}}$$

$$= \frac{2}{3} a^3$$



B x 軸の周りの回転体の体積

教 p.177

練習 41

次の曲線と x 軸で囲まれた部分が、 x 軸の周りに 1 回転してできる回転体の体積 V を求めよ。

(1) $y = x^2 - 2x$

(2) $y = \sin x \quad (0 \leq x \leq \pi)$

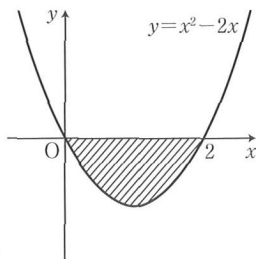
指針 回転体の体積 x 軸との交点の x 座標を求めてグラフの概形をかき、どのような図形が 1 回転してできる回転体かを確認してから、 x 軸の周りの回転体の体積の公式を利用する。公式では、 πy^2 が断面面積を表していることを理解しておく。

解答 (1) 曲線と x 軸の交点の x 座標は、 $x^2 - 2x = 0$ を解いて $x = 0, 2$

したがって、図の斜線部分の図形を x 軸の周りに 1 回転してできる回転体の体積 V を求めればよい。

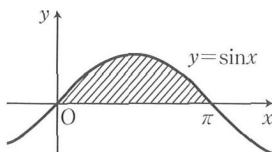
$$V = \pi \int_0^2 y^2 dx = \pi \int_0^2 (x^2 - 2x)^2 dx$$

$$= \pi \int_0^2 (x^4 - 4x^3 + 4x^2) dx = \pi \left[\frac{x^5}{5} - x^4 + \frac{4}{3} x^3 \right]_0^2$$



$$= \pi \left(\frac{32}{5} - 16 + \frac{4}{3} \cdot 8 \right) = \frac{16}{15} \pi \quad \text{答}$$

- (2) 図の斜線部分の図形を x 軸の周りに 1 回転してできる回転体の体積 V を求めればよい。



$$\begin{aligned} V &= \pi \int_0^{\pi} y^2 dx = \pi \int_0^{\pi} \sin^2 x dx \\ &= \frac{\pi}{2} \int_0^{\pi} (1 - \cos 2x) dx = \frac{\pi}{2} \left[x - \frac{1}{2} \sin 2x \right]_0^{\pi} = \frac{\pi^2}{2} \quad \text{答} \end{aligned}$$

練習

42

教 p.178

$a > 0, b > 0$ とする。楕円 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ で囲まれた部分が x 軸の周りに 1 回転してできる回転体の体積 V を求めよ。

指針 楕円の回転体の体積 まず、楕円と x 軸の交点の x 座標を求める。楕円の方程式を y^2 について解けば、そのまま公式に代入できる。

解答 この楕円と x 軸の交点の座標は $(-a, 0), (a, 0)$

また、方程式を y^2 について解くと $y^2 = \frac{b^2}{a^2}(a^2 - x^2)$

よって、求める体積 V は

$$\begin{aligned} V &= \pi \int_{-a}^a y^2 dx = \pi \int_{-a}^a \frac{b^2}{a^2}(a^2 - x^2) dx = 2\pi \cdot \frac{b^2}{a^2} \int_0^a (a^2 - x^2) dx \\ &= 2\pi \cdot \frac{b^2}{a^2} \left[a^2 x - \frac{x^3}{3} \right]_0^a = 2\pi \cdot \frac{b^2}{a^2} \cdot \frac{2}{3} a^3 = \frac{4}{3} \pi ab^2 \quad \text{答} \end{aligned}$$

C y 軸の周りの回転体の体積

教 p.178

練習

43

次の曲線と直線で囲まれた部分が、 y 軸の周りに 1 回転してできる回転体の体積 V を求めよ。

- (1) $y = 4 - x^2, y = 1$ (2) $y = 1 - \sqrt{x}, x$ 軸, y 軸

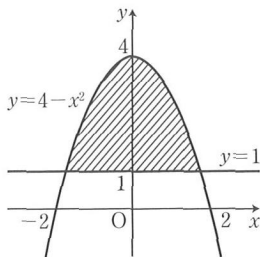
指針 y 軸の周りの回転体の体積 グラフの概形をかいて、回転する図形を調べる。 y 軸の周りの回転体の場合、積分する範囲は y 軸上に現れるから、とくに曲線や直線、 y 軸との交点の y 座標に注目する。

- (1) 放物線の式を x^2 について解けば、そのまま公式に代入できる。
 (2) 曲線の式を x について解き、公式に代入する。

解答 (1) 図の斜線部分を y 軸の周りに 1 回転してできる回転体の体積を求める。

$x^2=4-y$ より, 求める体積 V は

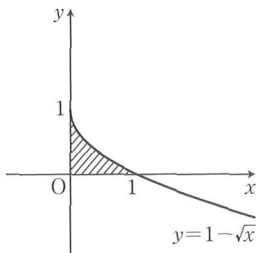
$$\begin{aligned} V &= \pi \int_1^4 x^2 dy = \pi \int_1^4 (4-y) dy \\ &= \pi \left[4y - \frac{y^2}{2} \right]_1^4 \\ &= \pi \left\{ (16-8) - \left(4 - \frac{1}{2} \right) \right\} = \frac{9}{2} \pi \quad \text{答} \end{aligned}$$



(2) 曲線 $y=1-\sqrt{x}$ は, 曲線 $y=-\sqrt{x}$ を y 軸方向に 1 だけ平行移動したものであるから, 図の斜線部分を y 軸の周りに 1 回転してできる回転体の体積を求める。

$x=(1-y)^2$ より, 求める体積 V は

$$\begin{aligned} V &= \pi \int_0^1 x^2 dy = \pi \int_0^1 (1-y)^4 dy \\ &= \pi \int_0^1 (y-1)^4 dy = \pi \left[\frac{(y-1)^5}{5} \right]_0^1 \\ &= \pi \left\{ 0 - \left(-\frac{1}{5} \right) \right\} = \frac{\pi}{5} \quad \text{答} \end{aligned}$$



D いろいろな式で表される曲線と回転体の体積

教 p.179

練習 44

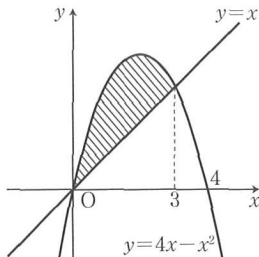
放物線 $y=4x-x^2$ と直線 $y=x$ で囲まれた部分が, x 軸の周りに 1 回転してできる回転体の体積 V を求めよ。

指針 **回転体の体積** 放物線と直線の交点の x 座標を求めてグラフの概形をかき, 回転する図形を明確にする。2 つの回転体の体積の差として求めればよいことがわかる。

解答 放物線と直線の交点の x 座標は, 方程式

$$4x-x^2=x \text{ を解いて } x=0, 3$$

ここで, 放物線 $y=4x-x^2$, x 軸, 直線 $x=3$ で囲まれた部分を x 軸の周りに 1 回転してできる回転体の体積を V_1 , 直線 $y=x$, x 軸, 直線 $x=3$ で囲まれた部分を x 軸の周りに 1 回転してできる回転体の体積を V_2 とすると



$$\begin{aligned} V_1 &= \pi \int_0^3 (4x-x^2)^2 dx = \pi \int_0^3 (16x^2-8x^3+x^4) dx \\ &= \pi \left[\frac{16}{3} x^3 - 2x^4 + \frac{x^5}{5} \right]_0^3 = \left(16 \cdot 9 - 2 \cdot 81 + \frac{243}{5} \right) \pi = \frac{153}{5} \pi \end{aligned}$$

$$V_2 = \pi \int_0^3 x^2 dx = \pi \left[\frac{x^3}{3} \right]_0^3 = 9\pi$$

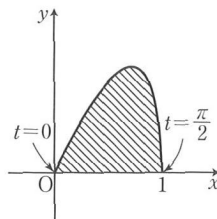
したがって、求める体積 V は

$$V = V_1 - V_2 = \frac{153}{5}\pi - 9\pi = \frac{108}{5}\pi \quad \text{答}$$

練習
45

次の曲線と x 軸で囲まれた部分が、 x 軸の周りに 1 回転してできる回転体の体積 V を求めよ。

$$x = \sin t, \quad y = \sin 2t \quad \left(0 \leq t \leq \frac{\pi}{2} \right)$$



教 p.180

指針 媒介変数表示された曲線と回転体の体積

求める体積 V は、 $V = \pi \int_0^1 y^2 dx$ で表される。これを置換積分法によって、 t についての定積分として計算する。

解答 $0 \leq t \leq \frac{\pi}{2}$ において、 $y \geq 0$ である。

$$y=0 \text{ とすると, } \sin 2t=0 \text{ より } t=0, \frac{\pi}{2}$$

また、 x と t の対応は右のようになる。

$$\text{求める体積 } V \text{ は } V = \pi \int_0^1 y^2 dx$$

$$x = \sin t \text{ から } dx = \cos t dt$$

よって、置換積分法により

$$\begin{aligned} V &= \pi \int_0^1 y^2 dx = \pi \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin 2t)^2 \cos t dt \\ &= 4\pi \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 t \cos^2 t \cos t dt \\ &= 4\pi \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 t (1 - \sin^2 t) \cos t dt \\ &= 4\pi \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin^2 t \cos t - \sin^4 t \cos t) dt \\ &= 4\pi \left[\frac{1}{3} \sin^3 t - \frac{1}{5} \sin^5 t \right]_0^{\frac{\pi}{2}} \\ &= 4\pi \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{5} \right) = \frac{8}{15} \pi \quad \text{答} \end{aligned}$$

x	$0 \rightarrow 1$
t	$0 \rightarrow \frac{\pi}{2}$

9 道のり

まとめ

1 速度と位置

数直線上を運動する点 P の時刻 t における座標を $x=f(t)$, 速度を v とすると

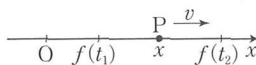
$$v = \frac{dx}{dt} = f'(t)$$

点 P の $t=t_1$ から $t=t_2$ までの位置の変化量は

$$f(t_2) - f(t_1) = \int_{t_1}^{t_2} v dt$$

時刻 $t=t_2$ における点 P の座標 x は

$$x = f(t_2) = f(t_1) + \int_{t_1}^{t_2} v dt$$



2 数直線上を運動する点と道のり

数直線上を運動する点 P の時刻 t における速度を v とし, 時刻 t_1 から t_2 までに P が通過する道のりを s とすると $s = \int_{t_1}^{t_2} |v| dt$ $\leftarrow |v|$ は速さを表す。

3 座標平面上を運動する点と道のり

座標平面上を運動する点 P(x, y) の時刻 t における x 座標, y 座標が t の関数で表されるとき, 時刻 t_1 から t_2 までに P が通過する道のり s は

$$s = \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2} dt = \int_{t_1}^{t_2} |\vec{v}| dt$$

A 速度と位置

教 p.181

練習
46

数直線上を運動する点 P の速度が, 時刻 t の関数として $v=4-2t$ で与えられている。 $t=0$ における P の座標が 2 であるとき, $t=3$ のときの P の座標を求めよ。

指針 **速度と位置** 上のまとめの 1 の公式 $x=f(t_2)=f(t_1)+\int_{t_1}^{t_2} v dt$ において, $t_1=0$, $t_2=3$, $v=4-2t$, $f(t_1)=f(0)=2$ の場合である。

解答 $t=3$ のときの P の x 座標は

$$x = 2 + \int_0^3 (4-2t) dt = 2 + \left[4t - t^2 \right]_0^3 = 2 + (12-9) = 5 \quad \text{答}$$

5 章

積分法とその応用

B 数直線上を運動する点と道のり

教 p.183

練習
47

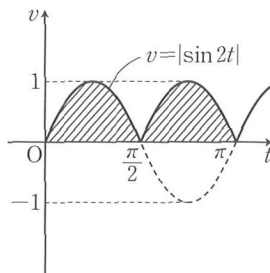
数直線上を運動する点Pがあり、時刻 t におけるPの速度は $v=\sin 2t$ であるとする。 $t=0$ から $t=\pi$ までにPが通過する道のり s を求めよ。

指針 数直線上の運動と道のり 時刻 t_1 から t_2 までにPが通過する道のり s は

$$s=\int_{t_1}^{t_2}|v|dt$$

解答 図より、求める道のり s は

$$\begin{aligned} s &= \int_0^{\pi} |\sin 2t| dt \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin 2t dt + \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} (-\sin 2t) dt \\ &= \left[-\frac{1}{2} \cos 2t \right]_0^{\frac{\pi}{2}} + \left[\frac{1}{2} \cos 2t \right]_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \\ &= \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \right) + \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \right) = 2 \quad \text{答} \end{aligned}$$



C 座標平面上を運動する点と道のり

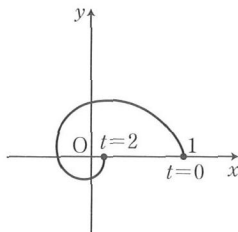
教 p.184

練習
48

座標平面上を運動する点Pの時刻 t における座標 (x, y) が

$$x=e^{-t}\cos \pi t, \quad y=e^{-t}\sin \pi t$$

で表されるとき、 $t=0$ から $t=2$ までにPが通過する道のり s を求めよ。



指針 座標平面上の運動と道のり 道のりは速さ $|\vec{v}|$ を積分して求める。座標平面上の点の運動の $\vec{v}$ は $\vec{v}=\left(\frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt}\right)$ であり、速さはその大きさである。

解答 $x=e^{-t}\cos \pi t, y=e^{-t}\sin \pi t$ より

$$\frac{dx}{dt} = -e^{-t}\cos \pi t - \pi e^{-t}\sin \pi t, \quad \frac{dy}{dt} = -e^{-t}\sin \pi t + \pi e^{-t}\cos \pi t$$

$$\begin{aligned} \text{よって} \quad & \left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 \\ &= (-e^{-t}\cos \pi t - \pi e^{-t}\sin \pi t)^2 + (-e^{-t}\sin \pi t + \pi e^{-t}\cos \pi t)^2 \\ &= e^{-2t}(\cos^2 \pi t + \sin^2 \pi t) + \pi^2 e^{-2t}(\sin^2 \pi t + \cos^2 \pi t) \\ &= e^{-2t}(1 + \pi^2) \end{aligned}$$

したがって、求める道のり s は

$$\begin{aligned} s &= \int_0^2 \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2} dt = \int_0^2 \sqrt{e^{-2t}(1+\pi^2)} dt &< e^{-t} > 0 \\ &= \sqrt{1+\pi^2} \int_0^2 e^{-t} dt = \sqrt{1+\pi^2} \left[-e^{-t}\right]_0^2 = \sqrt{1+\pi^2} \left(1 - \frac{1}{e^2}\right) \quad \square \end{aligned}$$

10 曲線の長さ

まとめ

1 媒介変数表示された曲線の長さ

曲線 $x=f(t)$, $y=g(t)$ ($a \leq t \leq b$) の長さ L は

$$\begin{aligned} L &= \int_a^b \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2} dt \\ &= \int_a^b \sqrt{\{f'(t)\}^2 + \{g'(t)\}^2} dt \end{aligned}$$

2 曲線 $y=f(x)$ の長さ

曲線 $y=f(x)$ ($a \leq x \leq b$) の長さ L は

$$L = \int_a^b \sqrt{1 + \{f'(x)\}^2} dx = \int_a^b \sqrt{1 + y'^2} dx$$

5章

積分法とその応用

A 媒介変数表示された曲線の長さ

教 p.186

練習
49

次のアステロイドの長さ L を求めよ。

$$x = \cos^3 t, \quad y = \sin^3 t \quad (0 \leq t \leq 2\pi)$$

指針 **アステロイドの長さ** 教科書 p.186 で示されているように、アステロイドは x 軸、 y 軸に関して対称であるから、第1象限にある部分、すなわち $0 \leq t \leq \frac{\pi}{2}$ の部分の長さを4倍すればよい。

解答 $\frac{dx}{dt} = 3\cos^2 t(-\sin t) = -3\sin t \cos^2 t$, $\frac{dy}{dt} = 3\sin^2 t \cos t$

また、アステロイドは x 軸、 y 軸に関して対称であるから

$$\begin{aligned} L &= 4 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{(-3\sin t \cos^2 t)^2 + (3\sin^2 t \cos t)^2} dt \\ &= 4 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{9\sin^2 t \cos^2 t (\cos^2 t + \sin^2 t)} dt \\ &= 4 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{9\sin^2 t \cos^2 t} dt \end{aligned}$$

$0 \leq t \leq \frac{\pi}{2}$ では $\sin t \geq 0$, $\cos t \geq 0$ であるから

$$\begin{aligned} L &= 12 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin t \cos t dt \\ &= 6 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin 2t dt = 6 \left[-\frac{1}{2} \cos 2t \right]_0^{\frac{\pi}{2}} = 6 \quad \text{答} \end{aligned}$$

B 曲線 $y=f(x)$ の長さ

教 p.187

練習
50

曲線 $y=x\sqrt{x}$ ($0 \leq x \leq 5$) の長さ L を求めよ。

指針 曲線の長さ 曲線の長さの公式 $L = \int_a^b \sqrt{1+y'^2} dx$ にあてはめればよい。

解答 $y' = \frac{3}{2}\sqrt{x}$ であるから

$$\begin{aligned} 1+y'^2 &= 1 + \frac{9}{4}x = \frac{9x+4}{4} \\ \text{よって} \quad L &= \int_0^5 \sqrt{\frac{9x+4}{4}} dx = \frac{1}{2} \int_0^5 (9x+4)^{\frac{1}{2}} dx \\ &= \frac{1}{2} \left[\frac{1}{9} \cdot \frac{2}{3} (9x+4)^{\frac{3}{2}} \right]_0^5 \\ &= \frac{1}{27} \left[(9x+4)\sqrt{9x+4} \right]_0^5 \\ &= \frac{1}{27} (49\sqrt{49} - 4\sqrt{4}) = \frac{335}{27} \quad \text{答} \end{aligned}$$

第5章 第3節

問題

教 p.188

14 $0 \leq x \leq \pi$ の範囲において、2つの曲線 $y = \sin x$, $y = \sin 2x$ で囲まれた2つの部分の面積の和 S を求めよ。

指針 2曲線間の面積 グラフの概形をかくと、途中で2曲線の上下関係が入れかわることがわかる。したがって、方程式 $\sin x = \sin 2x$ を解いて交点の x 座標を求め、2つの区間に分けて定積分を計算する。

なお、 $y = \sin 2x$ のグラフは、 $y = \sin x$ のグラフを、 y 軸をもとにして x 軸方向に $\frac{1}{2}$ 倍に縮小したものである。

解答 $0 \leq x \leq \pi$ の範囲で2つの曲線の交点の x 座標を求める。

方程式 $\sin x = \sin 2x$ を解くと

$$\sin x = 2 \sin x \cos x \text{ より}$$

$$\sin x (1 - 2 \cos x) = 0$$

$$\sin x = 0 \text{ または } \cos x = \frac{1}{2}$$

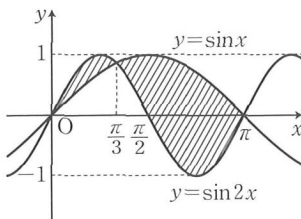
$$\text{すなわち } x = 0, \frac{\pi}{3}, \pi$$

$$\text{ここで } 0 \leq x \leq \frac{\pi}{3} \text{ のとき } \sin 2x \geq \sin x$$

$$\frac{\pi}{3} \leq x \leq \pi \text{ のとき } \sin x \geq \sin 2x$$

であるから、求める面積の和 S は

$$\begin{aligned} S &= \int_0^{\frac{\pi}{3}} (\sin 2x - \sin x) dx + \int_{\frac{\pi}{3}}^{\pi} (\sin x - \sin 2x) dx \\ &= \left[-\frac{1}{2} \cos 2x + \cos x \right]_0^{\frac{\pi}{3}} + \left[-\cos x + \frac{1}{2} \cos 2x \right]_{\frac{\pi}{3}}^{\pi} \\ &= \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{2} \right) - \left(-\frac{1}{2} + 1 \right) + \left(1 + \frac{1}{2} \right) - \left(-\frac{1}{2} - \frac{1}{4} \right) = \frac{5}{2} \quad \text{答} \end{aligned}$$



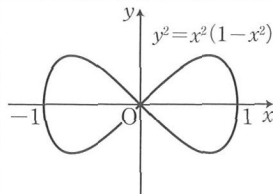
5章

積分法とその応用

15 曲線 $y^2 = x^2(1-x^2)$ について、次の問いに答えよ。

(1) この曲線は、 x 軸および y 軸に関して対称であることを示せ。

(2) この曲線で囲まれた 2 つの部分の面積の和 S を求めよ。



指針 曲線で囲まれた図形の面積

(1) x 軸および y 軸に関して対称であることを示すには、曲線上の点 $P(a, b)$ に対して、 $Q(a, -b)$ 、 $R(-a, b)$ も曲線上にあることを示せばよい。

(2) (1)より、 $x \geq 0, y \geq 0$ の部分の面積を求めて 4 倍すればよい。置換積分法を利用する。

解答 (1) 曲線 $y^2 = x^2(1-x^2)$ …… ① 上に点 $P(a, b)$ をとると

$$b^2 = a^2(1-a^2) \quad \dots\dots ②$$

が成り立つ。

P と x 軸に関して対称な点 $Q(a, -b)$ について、 $(-b)^2 = b^2$ であるから、

②より $(-b)^2 = a^2(1-a^2)$ が成り立つので、 Q は曲線 ① 上にある。

よって、曲線 ① は x 軸に関して対称である。

P と y 軸に関して対称な点 $R(-a, b)$ についても、同様に、曲線 ① 上にあるから、曲線 ① は y 軸に関して対称である。 図

(2) 曲線 $y^2 = x^2(1-x^2)$ は、 x 軸および y 軸に関して対称であるから、求める面積は図の影の部分の面積の 4 倍である。

$x \geq 0, y \geq 0$ のとき曲線の方程式は

$$y = x\sqrt{1-x^2}$$

で表される。

$$\text{よって} \quad S = 4 \int_0^1 x\sqrt{1-x^2} \, dx$$

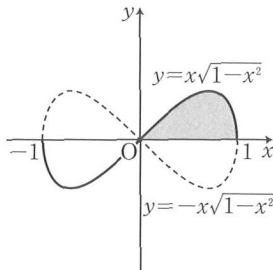
ここで、 $1-x^2 = t$ とおくと

$$-2x \, dx = dt$$

x と t の対応は右ようになる。

したがって

$$\begin{aligned} S &= 4 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) \int_0^1 \sqrt{1-x^2} \cdot (-2x) \, dx \\ &= -2 \int_1^0 \sqrt{t} \, dt = 2 \int_0^1 \sqrt{t} \, dt = 2 \left[\frac{2}{3} t^{\frac{3}{2}} \right]_0^1 = \frac{4}{3} \quad \text{答} \end{aligned}$$



x	$0 \rightarrow 1$
t	$1 \rightarrow 0$

別解 (2) 定積分 $4\int_0^1 x\sqrt{1-x^2} dx$ の計算は、次の ①, ② のようにしてもよい。

$$\begin{aligned} \text{①} \quad S &= 4\int_0^1 x\sqrt{1-x^2} dx = -2\int_0^1 \sqrt{1-x^2} \cdot (1-x^2)' dx \\ &= -2\left[\frac{2}{3}(1-x^2)^{\frac{3}{2}}\right]_0^1 = -2\cdot\left(-\frac{2}{3}\right) = \frac{4}{3} \quad \text{答} \end{aligned}$$

② $x = \sin \theta$ とおくと x と θ の対応は右のようになる。

また $dx = \cos \theta d\theta$

x	$0 \rightarrow 1$
θ	$0 \rightarrow \frac{\pi}{2}$

$0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$ のとき, $\cos \theta \geq 0$ であるから $\sqrt{1-\sin^2 \theta} = \cos \theta$

$$\begin{aligned} \text{よって} \quad S &= 4\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin \theta \cos \theta \cos \theta d\theta = 4\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 \theta (\cos \theta)' d\theta \\ &= -4\left[\frac{1}{3} \cos^3 \theta\right]_0^{\frac{\pi}{2}} = -4\cdot\left(-\frac{1}{3}\right) = \frac{4}{3} \quad \text{答} \end{aligned}$$

教 p.188

16 曲線 $y = \frac{x-1}{x+1}$ と x 軸および y 軸で囲まれた部分が, x 軸の周りに 1 回転してできる回転体の体積 V を求めよ。

指針 回転体の体積 曲線のグラフをかいて, 回転体の体積の公式

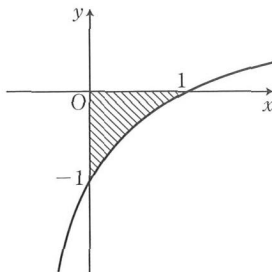
$$V = \pi \int_a^b y^2 dx \quad (a < b) \text{ を利用して求める。}$$

解答 $y = \frac{x-1}{x+1} = \frac{(x+1)-2}{x+1} = 1 - \frac{2}{x+1}$

より, グラフは右の図のようになるから, 求める体積 V は図の斜線部分を x 軸の周りに 1 回転してできる回転体の体積である。

よって

$$\begin{aligned} V &= \pi \int_0^1 y^2 dx = \pi \int_0^1 \left(1 - \frac{2}{x+1}\right)^2 dx \\ &= \pi \int_0^1 \left\{1 - \frac{4}{x+1} + \frac{4}{(x+1)^2}\right\} dx \\ &= \pi \left[x - 4 \log|x+1| - \frac{4}{x+1} \right]_0^1 = (3 - 4 \log 2) \pi \quad \text{答} \end{aligned}$$



教 p.188

17 曲線 $y = e^x$ と y 軸および直線 $y = e$ で囲まれた部分が, x 軸の周りに 1 回転してできる回転体の体積 V を求めよ。

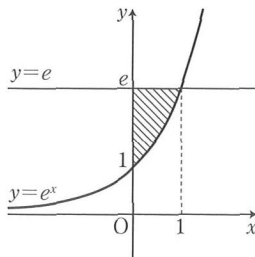
指針 回転体の体積 曲線と直線の交点の x 座標を求めてグラフの概形をかき, 回転する図形を調べる。2 つの回転体の体積の差として求める。

解答 曲線と直線の交点の x 座標は、

$$e^x = e \text{ を解いて } x = 1$$

よって、求める体積 V は

$$\begin{aligned} V &= \pi \int_0^1 e^2 dx - \pi \int_0^1 (e^x)^2 dx \\ &= \pi e^2 \left[x \right]_0^1 - \pi \left[\frac{1}{2} e^{2x} \right]_0^1 \\ &= \pi e^2 - \frac{1}{2} \pi (e^2 - 1) = \frac{e^2 + 1}{2} \pi \quad \text{答} \end{aligned}$$



教 p.188

18 数直線上を運動する点 P があり、時刻 t における P の速度は

$v = \sin t + \sin 2t$ であるという。ただし、 $t=0$ のとき、 P は原点にあるとする。

(1) 時刻 t における P の座標を求めよ。

(2) $t=0$ から $t=\pi$ までに P が通過する道のり s を求めよ。

指針 数直線上の運動の位置と道のり

(1) 時刻 t の座標を $f(t)$ とすると、速度 v との間には、 $v=f'(t)$ という関係があり、 $f(t)$ は v を 0 から t まで積分して求められる。数直線上を運動する

点の座標の公式 $x=f(t_2)=f(t_1)+\int_{t_1}^{t_2} v dt$ において、 $t_1=0$ 、 $t_2=t$ 、

$f(t_1)=f(0)=0$ の場合である。

(2) 道のりは、速さ $|v|$ を積分する。 $0 \leq t \leq \pi$ の範囲で v の符号を調べて、絶対値記号をはずしてから計算する。

解答 (1) 時刻 t における P の座標を x とすると

$$\begin{aligned} x &= 0 + \int_0^t v dt = \int_0^t (\sin t + \sin 2t) dt \\ &= \left[-\cos t - \frac{1}{2} \cos 2t \right]_0^t = -\cos t - \frac{1}{2} \cos 2t + \frac{3}{2} \quad \text{答} \end{aligned}$$

(2) $v = \sin t + \sin 2t = \sin t (1 + 2 \cos t)$ より

$$0 \leq t \leq \frac{2}{3} \pi \text{ のとき } v \geq 0, \quad \frac{2}{3} \pi \leq t \leq \pi \text{ のとき } v \leq 0$$

よって、求める道のり s は

$$\begin{aligned} s &= \int_0^{\frac{2}{3}\pi} |v| dt = \int_0^{\frac{2}{3}\pi} (\sin t + \sin 2t) dt + \int_{\frac{2}{3}\pi}^{\pi} \{-(\sin t + \sin 2t)\} dt \\ &= \left[-\cos t - \frac{1}{2} \cos 2t \right]_0^{\frac{2}{3}\pi} + \left[\cos t + \frac{1}{2} \cos 2t \right]_{\frac{2}{3}\pi}^{\pi} \\ &= \left\{ \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{4} \right) - \left(-1 - \frac{1}{2} \right) \right\} + \left\{ \left(-1 + \frac{1}{2} \right) - \left(-\frac{1}{2} - \frac{1}{4} \right) \right\} = \frac{5}{2} \quad \text{答} \end{aligned}$$

19 次のように媒介変数表示される曲線 C がある。

$$x = \cos \theta, \quad y = \cos 2\theta \quad (0 \leq \theta \leq \pi)$$

曲線 C と x 軸で囲まれた部分の面積 S を、次の 2 通りの方法で求めよ。

① x で積分する。

② θ で積分する。

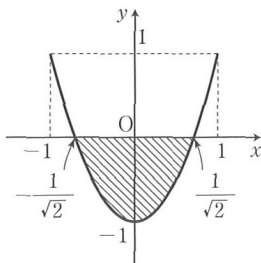
指針 媒介変数表示の曲線と面積 媒介変数を消去して x と y の方程式を求め、曲線 C の概形をかく。

解答 $y = \cos 2\theta = 2\cos^2\theta - 1 = 2x^2 - 1$

$0 \leq \theta \leq \pi$ であるから

$$-1 \leq x \leq 1, \quad -1 \leq y \leq 1$$

よって、求める面積 S は、右の図の斜線部分の面積である。



$$\begin{aligned} \text{①} \quad S &= -\int_{-\frac{1}{\sqrt{2}}}^{\frac{1}{\sqrt{2}}} y dx = -\int_{-\frac{1}{\sqrt{2}}}^{\frac{1}{\sqrt{2}}} (2x^2 - 1) dx \\ &= -2 \int_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}} (2x^2 - 1) dx \end{aligned}$$

$$= -2 \left[\frac{2}{3} x^3 - x \right]_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}} = \frac{2\sqrt{2}}{3} \quad \text{答}$$

② $x = \cos \theta$ より

$$dx = -\sin \theta d\theta$$

x と θ の対応は右のようになる。

よって、置換積分法により

x	$-\frac{1}{\sqrt{2}} \rightarrow \frac{1}{\sqrt{2}}$
θ	$\frac{3}{4}\pi \rightarrow \frac{\pi}{4}$

$$\begin{aligned} S &= -\int_{-\frac{1}{\sqrt{2}}}^{\frac{1}{\sqrt{2}}} y dx = -\int_{\frac{3}{4}\pi}^{\frac{\pi}{4}} \cos 2\theta \cdot (-\sin \theta) d\theta \\ &= \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3}{4}\pi} (2\cos^2\theta - 1) \cdot (\cos \theta)' d\theta \\ &= \left[\frac{2}{3} \cos^3 \theta - \cos \theta \right]_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3}{4}\pi} = \left(-\frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}} \right) - \left(\frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{2}} \right) \\ &= \frac{2\sqrt{2}}{3} \quad \text{答} \end{aligned}$$

別解 公式 $\int_a^b (x-\alpha)(x-\beta) dx = -\frac{1}{6}(\beta-\alpha)^3$ を利用する。

$$\begin{aligned} \text{①} \quad S &= -2 \int_{-\frac{1}{\sqrt{2}}}^{\frac{1}{\sqrt{2}}} \left(x + \frac{1}{\sqrt{2}} \right) \left(x - \frac{1}{\sqrt{2}} \right) dx = -2 \cdot \left(-\frac{1}{6} \right) \left\{ \frac{1}{\sqrt{2}} - \left(-\frac{1}{\sqrt{2}} \right) \right\}^3 \\ &= \frac{2\sqrt{2}}{3} \quad \text{答} \end{aligned}$$

第5章 章末問題A

教 p.189

1. 次の関数の不定積分を求めよ。

(1) $e^x \sqrt{e^x + 1}$

(2) $\frac{x}{(x-1)^3}$

(3) $\frac{x}{x^2 - 3x + 2}$

(4) $\cos^5 x$

(5) $\frac{1}{e^x - e^{-x}}$

(6) $2x \log(x^2 + 1)$

指針 不定積分の計算 (3)は部分分数に分解する。その他は置換積分法を利用する。

さらに、(5)は部分分数に分解し、(6)は部分積分法の考え方も使う。

解答 (1) $e^x + 1 = u$ とおくと $e^x dx = du$

$$\begin{aligned} \int e^x \sqrt{e^x + 1} dx &= \int \sqrt{u} du && \leftarrow \text{置換積分法(2)} \\ &= \frac{2}{3} u^{\frac{3}{2}} + C \\ &= \frac{2}{3} (e^x + 1) \sqrt{e^x + 1} + C \quad \text{答} \end{aligned}$$

(2) $x - 1 = t$ とおくと $x = t + 1$, $dx = dt$ $\leftarrow$ 置換積分法(1)

$$\begin{aligned} \int \frac{x}{(x-1)^3} dx &= \int \frac{t+1}{t^3} dt \\ &= \int (t^{-2} + t^{-3}) dt = -t^{-1} - \frac{1}{2} t^{-2} + C \\ &= -\frac{1}{x-1} - \frac{1}{2(x-1)^2} + C \\ &= -\frac{2x-1}{2(x-1)^2} + C \quad \text{答} \end{aligned}$$

(3) 分母を因数分解して

$$\frac{x}{(x-2)(x-1)} = \frac{a}{x-2} + \frac{b}{x-1} \quad \text{とおく。}$$

 $\leftarrow$ 部分分数に分解する。

分母を払うと $x = a(x-1) + b(x-2)$

すなわち $x = (a+b)x - (a+2b)$

よって $a+b=1$, $a+2b=0$

 $\leftarrow$ 恒等式の性質

これを解いて $a=2$, $b=-1$

$$\begin{aligned} \text{したがって} \quad \int \frac{x}{x^2 - 3x + 2} dx &= \int \left(\frac{2}{x-2} - \frac{1}{x-1} \right) dx \\ &= 2 \log|x-2| - \log|x-1| + C \\ &= \log \frac{(x-2)^2}{|x-1|} + C \quad \text{答} \end{aligned}$$

$$(4) \cos^5 x = \cos^4 x \cdot \cos x = (1 - \sin^2 x)^2 \cos x \\ = (1 - 2\sin^2 x + \sin^4 x) \cos x$$

$$\sin x = u \text{ とおくと } \cos x dx = du$$

← 置換積分法(2)

$$\int \cos^5 x dx = \int (1 - 2\sin^2 x + \sin^4 x) \cdot \cos x dx \\ = \int (1 - 2u^2 + u^4) du = u - \frac{2}{3}u^3 + \frac{u^5}{5} + C \\ = \sin x - \frac{2}{3}\sin^3 x + \frac{1}{5}\sin^5 x + C \quad \text{答}$$

$$(5) e^x = u \text{ とおくと } e^x dx = du$$

← 置換積分法(2)

$$\int \frac{dx}{e^x - e^{-x}} = \int \frac{e^x}{e^{2x} - 1} dx = \int \frac{1}{(e^x)^2 - 1} \cdot e^x dx \\ = \int \frac{du}{u^2 - 1} = \int \frac{du}{(u+1)(u-1)} \\ = \frac{1}{2} \int \left(\frac{1}{u-1} - \frac{1}{u+1} \right) du \\ = \frac{1}{2} (\log|u-1| - \log|u+1|) + C \\ = \frac{1}{2} \log \left| \frac{u-1}{u+1} \right| + C = \frac{1}{2} \log \left| \frac{e^x - 1}{e^x + 1} \right| + C \\ = \frac{1}{2} \log \left| \frac{e^x - 1}{e^x + 1} \right| + C \quad \text{答}$$

← 部分分数に分解する。

$$(6) x^2 + 1 = u \text{ とおくと } 2x dx = du$$

← 置換積分法(2)

$$\int 2x \log(x^2 + 1) dx = \int \log u du \\ = \int (\log u) \cdot (u)' du \\ = (\log u) \cdot u - \int \frac{1}{u} \cdot u du \\ = u \log u - u + C_1 \\ = (x^2 + 1) \log(x^2 + 1) - (x^2 + 1) + C_1 \\ = (x^2 + 1) \log(x^2 + 1) - x^2 + C \quad \text{答}$$

← 部分積分法

$$\leftarrow (\log u)' = \frac{1}{u}$$

← 定数部分は1つの積分定数Cで表す。

別解 (6) $\int 2x \log(x^2 + 1) dx$

$$= \int (x^2 + 1)' \cdot \log(x^2 + 1) dx \\ = (x^2 + 1) \log(x^2 + 1) - \int (x^2 + 1) \cdot \frac{2x}{x^2 + 1} dx \\ = (x^2 + 1) \log(x^2 + 1) - x^2 + C \quad \text{答}$$

5章

積分法とその応用

2. 次の定積分を求めよ。

$$(1) \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^5 x \cos x dx$$

$$(2) \int_0^1 \frac{e^x}{e^x+1} dx$$

$$(3) \int_1^e x^2 \log x dx$$

$$(4) \int_0^4 |(x-4)(x-1)^3| dx$$

$$(5) \int_{-\frac{1}{\sqrt{2}}}^{\frac{1}{\sqrt{2}}} \frac{x^2}{\sqrt{1-x^2}} dx$$

$$(6) \int_0^{\sqrt{3}} \frac{t^2}{(1+t^2)^2} dt$$

指針 定積分の計算

(1), (2) それぞれ, $(\sin x)' = \cos x$, $(e^x+1)' = e^x$ に着目して積分する。

(3) 部分積分法を利用する。 x^2 の方を微分された関数とみる。

(4) 区間を分けて絶対値記号をはずす。 $(x-4)(x-1)^3$ については部分積分法を利用するとよい。

(5), (6) 三角関数で置換する。それぞれ $x = \sin \theta$, $t = \tan \theta$ とおく。下端, 上端の対応に注意する。

解答 (1) $\sin x = t$ とおくと $\cos x dx = dt$

x と t の対応は右のようになる。

よって

x	$0 \rightarrow \frac{\pi}{2}$
t	$0 \rightarrow 1$

$$\begin{aligned} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^5 x \cos x dx &= \int_0^1 t^5 dt \\ &= \left[\frac{t^6}{6} \right]_0^1 = \frac{1}{6} \quad \text{答} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (2) \int_0^1 \frac{e^x}{e^x+1} dx &= \int_0^1 \frac{(e^x+1)'}{e^x+1} dx = \left[\log(e^x+1) \right]_0^1 \\ &= \log(e+1) - \log 2 = \log \frac{e+1}{2} \quad \text{答} \end{aligned}$$

← $\frac{g'(x)}{g(x)}$ の積分

$$\begin{aligned} (3) \int_1^e x^2 \log x dx &= \int_1^e \left(\frac{x^3}{3} \right)' \log x dx \\ &= \left[\frac{x^3}{3} \log x \right]_1^e - \frac{1}{3} \int_1^e x^3 \cdot \frac{1}{x} dx \\ &= \frac{e^3}{3} - \frac{1}{3} \left[\frac{x^3}{3} \right]_1^e = \frac{e^3}{3} - \frac{e^3-1}{9} = \frac{2e^3+1}{9} \quad \text{答} \end{aligned}$$

← 部分積分法

$$\begin{aligned} (4) \quad 0 \leq x \leq 1 \text{ のとき} \quad & (x-4)(x-1)^3 \geq 0 \\ 1 \leq x \leq 4 \text{ のとき} \quad & (x-4)(x-1)^3 \leq 0 \end{aligned}$$

また, $(x-4)(x-1)^3 = (x-4) \left\{ \frac{(x-1)^4}{4} \right\}'$ であるから

$$\int_0^4 |(x-4)(x-1)^3| dx$$

$$\begin{aligned}
&= \int_0^1 (x-4)(x-1)^3 dx + \int_1^4 \{-(x-4)(x-1)^3\} dx \\
&= \left[(x-4) \cdot \frac{(x-1)^4}{4} \right]_0^1 - \int_0^1 \frac{(x-1)^4}{4} dx \\
&\quad - \left[(x-4) \cdot \frac{(x-1)^4}{4} \right]_1^4 + \int_1^4 \frac{(x-1)^4}{4} dx \\
&= 1 - \frac{1}{4} \left[\frac{(x-1)^5}{5} \right]_0^1 + \frac{1}{4} \left[\frac{(x-1)^5}{5} \right]_1^4 \\
&= 1 - \frac{1}{20} + \frac{243}{20} = \frac{131}{10} \quad \boxed{\text{答}}
\end{aligned}$$

← 部分積分法

(5) $\frac{x^2}{\sqrt{1-x^2}}$ は偶関数であるから

$$\int_{-\frac{1}{\sqrt{2}}}^{\frac{1}{\sqrt{2}}} \frac{x^2}{\sqrt{1-x^2}} dx = 2 \int_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}} \frac{x^2}{\sqrt{1-x^2}} dx$$

ここで, $x = \sin \theta$ とおくと $dx = \cos \theta d\theta$
 x と θ の対応は右のようになる。

また, この範囲では, $\cos \theta > 0$ であるから

$$\frac{x^2}{\sqrt{1-x^2}} = \frac{\sin^2 \theta}{\sqrt{1-\sin^2 \theta}} = \frac{\sin^2 \theta}{\cos \theta}$$

よって

$$\begin{aligned}
\int_{-\frac{1}{\sqrt{2}}}^{\frac{1}{\sqrt{2}}} \frac{x^2}{\sqrt{1-x^2}} dx &= 2 \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\sin^2 \theta}{\cos \theta} \cdot \cos \theta d\theta = 2 \int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin^2 \theta d\theta \\
&= \int_0^{\frac{\pi}{4}} (1 - \cos 2\theta) d\theta = \left[\theta - \frac{1}{2} \sin 2\theta \right]_0^{\frac{\pi}{4}} \\
&= \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2} \quad \boxed{\text{答}}
\end{aligned}$$

(6) $t = \tan \theta$ とおくと $dt = \frac{1}{\cos^2 \theta} d\theta$

t と θ の対応は右のようになる。

$$\text{また } \frac{t^2}{(1+t^2)^2} = \frac{\tan^2 \theta}{(1+\tan^2 \theta)^2}$$

$$= \frac{\sin^2 \theta}{\cos^2 \theta} \cdot \frac{1}{\frac{1}{\cos^4 \theta}} = \sin^2 \theta \cos^2 \theta$$

であるから

$$\begin{aligned}
\int_0^{\sqrt{3}} \frac{t^2}{(1+t^2)^2} dt &= \int_0^{\frac{\pi}{3}} \sin^2 \theta \cos^2 \theta \cdot \frac{1}{\cos^2 \theta} d\theta = \int_0^{\frac{\pi}{3}} \sin^2 \theta d\theta \\
&= \int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{1 - \cos 2\theta}{2} d\theta \\
&= \frac{1}{2} \left[\theta - \frac{1}{2} \sin 2\theta \right]_0^{\frac{\pi}{3}} = \frac{\pi}{6} - \frac{\sqrt{3}}{8} \quad \boxed{\text{答}}
\end{aligned}$$

x	$0 \rightarrow \frac{1}{\sqrt{2}}$
θ	$0 \rightarrow \frac{\pi}{4}$

t	$0 \rightarrow \sqrt{3}$
θ	$0 \rightarrow \frac{\pi}{3}$

$$\begin{aligned}
&\leftarrow \tan^2 \theta + 1 \\
&= \frac{1}{\cos^2 \theta}
\end{aligned}$$

5 章

積分法とその応用

3. m, n は自然数とする。定積分 $\int_0^{2\pi} \sin mt \sin nt dt$ を, $m \neq n, m = n$ の場合に分けて求めよ。

指針 三角関数に関する定積分 三角関数の積を和や差の形に直す等式のうち, 次の公式を利用する。

$$\sin \alpha \sin \beta = -\frac{1}{2} \{ \cos(\alpha + \beta) - \cos(\alpha - \beta) \}$$

解答 $\sin mt \sin nt = -\frac{1}{2} \{ \cos(m+n)t - \cos(m-n)t \}$ と変形できる。

$m \neq n$ のとき

$$\begin{aligned} \int_0^{2\pi} \sin mt \sin nt dt &= -\frac{1}{2} \left[\frac{1}{m+n} \sin(m+n)t - \frac{1}{m-n} \sin(m-n)t \right]_0^{2\pi} \\ &= 0 \end{aligned}$$

$m = n$ のとき, $\cos(m-n)t = 1$ となるから

$$\int_0^{2\pi} \sin mt \sin nt dt = -\frac{1}{2} \left[\frac{1}{2m} \sin 2mt - t \right]_0^{2\pi} = \pi$$

答 $m \neq n$ のとき 0, $m = n$ のとき π

4. 次の極限値を求めよ。

$$S = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{n}} \left(\frac{1}{\sqrt{n+1}} + \frac{1}{\sqrt{n+2}} + \frac{1}{\sqrt{n+3}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{2n}} \right)$$

指針 区分解法と定積分 $\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n f\left(\frac{k}{n}\right)$ の形を作るために, 各項から $\frac{1}{\sqrt{n}}$ をくくり出し, 第 k 項を $\frac{k}{n}$ を使って表す。 $\frac{k}{n}$ を x でおき換えた関数 $f(x)$ を作り, 0 から 1 まで積分する。

$$\begin{aligned} \text{解答 } S &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{n}} \left(\frac{1}{\sqrt{n+1}} + \frac{1}{\sqrt{n+2}} + \frac{1}{\sqrt{n+3}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{n+n}} \right) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{n}} \cdot \frac{1}{\sqrt{n}} \left(\frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{n}}} + \frac{1}{\sqrt{1+\frac{2}{n}}} + \frac{1}{\sqrt{1+\frac{3}{n}}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{1+\frac{n}{n}}} \right) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \left(\frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{n}}} + \frac{1}{\sqrt{1+\frac{2}{n}}} + \frac{1}{\sqrt{1+\frac{3}{n}}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{1+\frac{n}{n}}} \right) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \frac{1}{\sqrt{1+\frac{k}{n}}} \end{aligned}$$

ここで, $f(x) = \frac{1}{\sqrt{1+x}}$ とすると

$$\begin{aligned}
 S &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n f\left(\frac{k}{n}\right) = \int_0^1 f(x) dx = \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1+x}} \\
 &= \left[2\sqrt{1+x} \right]_0^1 = 2(\sqrt{2}-1) \quad \text{答}
 \end{aligned}$$

教 p.189

5. 原点から曲線 $y = \log 2x$ に引いた接線とこの曲線および x 軸で囲まれた部分の面積 S を求めよ。

指針 接線と面積 まず、接線の方程式を求める。接点の座標を $(a, \log 2a)$ とおいて、接線の方程式を a を使って表し、これが原点を通ることから a の値を求める。次に、グラフの概形をかいて、面積を求める部分を調べ、接線と曲線の上下関係に注意して定積分を計算する。

解答 接点の座標を $(a, \log 2a)$ とする。

$$y = \log 2x \text{ を微分すると } y' = \frac{1}{2x} \cdot (2x)' = \frac{1}{x}$$

であるから、この接点における接線の方程式は

$$y - \log 2a = \frac{1}{a}(x - a)$$

これが原点 $(0, 0)$ を通るから $-\log 2a = -1$

$$\text{すなわち } a = \frac{e}{2}$$

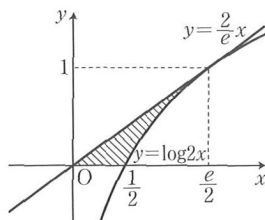
よって、接点の座標は $\left(\frac{e}{2}, 1\right)$ 、接線の方程式は

$$y = \frac{2}{e}x$$

ゆえに、図の斜線部分の面積を求めればよい。

したがって、求める面積 S は

$$\begin{aligned}
 S &= \frac{1}{2} \cdot \frac{e}{2} \cdot 1 - \int_{\frac{1}{2}}^{\frac{e}{2}} \log 2x dx \\
 &= \frac{e}{4} - \left(\left[x \log 2x \right]_{\frac{1}{2}}^{\frac{e}{2}} - \int_{\frac{1}{2}}^{\frac{e}{2}} x \cdot \frac{2}{2x} dx \right) \\
 &= \frac{e}{4} - \left(\frac{e}{2} - \left[x \right]_{\frac{1}{2}}^{\frac{e}{2}} \right) = \frac{e}{4} - \frac{e}{2} + \left(\frac{e}{2} - \frac{1}{2} \right) \\
 &= \frac{e}{4} - \frac{1}{2} \quad \text{答}
 \end{aligned}$$



← 三角形の面積を利用。

← 部分積分法

6. 曲線 $y=e^x$ とこの曲線上の点 $(1, e)$ における接線および y 軸で囲まれた部分の面積 S を求めよ。また、この部分が x 軸の周りに 1 回転してできる回転体の体積 V を求めよ。

指針 接線と面積, 回転体の体積 接線の方程式を求めてグラフの概形をかき、題意の図形を調べる。面積 S は 2 つの図形の面積の差、体積 V は 2 つの回転体の体積の差として求められる。

解答 $y=e^x$ を微分すると $y'=e^x$

よって、点 $(1, e)$ における接線の方程式は

$$y-e=e(x-1) \quad \text{すなわち} \quad y=ex$$

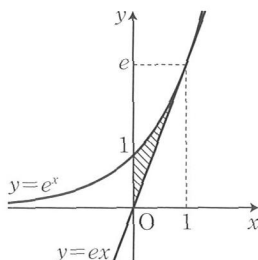
図のように、 $0 \leq x \leq 1$ のとき $e^x \geq ex$ であるから

$$S = \int_0^1 e^x dx - \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot e = \left[e^x \right]_0^1 - \frac{e}{2}$$

$$= (e-1) - \frac{e}{2} = \frac{e}{2} - 1 \quad \text{答}$$

$$V = \pi \int_0^1 (e^x)^2 dx - \pi \int_0^1 (ex)^2 dx = \pi \left[\frac{1}{2} e^{2x} \right]_0^1 - \pi e^2 \left[\frac{x^3}{3} \right]_0^1$$

$$= \frac{1}{2} \pi (e^2 - 1) - \frac{1}{3} \pi e^2 = \frac{e^2 - 3}{6} \pi \quad \text{答}$$



7. 座標平面上を運動する点 P の時刻 t における座標 (x, y) が

$$x = \log t, \quad y = \frac{1}{2} \left(t + \frac{1}{t} \right)$$

で表されるとき、 $t=1$ から $t=3$ までに P が通過する道のり s を求めよ。

指針 座標平面上の運動と道のり $t=\alpha$ から $t=\beta$ までに P が通過する道のり s は

$\int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{\left(\frac{dx}{dt} \right)^2 + \left(\frac{dy}{dt} \right)^2} dt$ である。これは、曲線の長さに等しいことになる。

解答 $\frac{dx}{dt} = \frac{1}{t}$, $\frac{dy}{dt} = \frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{t^2} \right)$ であるから、求める道のり s は

$$\begin{aligned} s &= \int_1^3 \sqrt{\left(\frac{dx}{dt} \right)^2 + \left(\frac{dy}{dt} \right)^2} dt = \int_1^3 \sqrt{\left(\frac{1}{t} \right)^2 + \left\{ \frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{t^2} \right) \right\}^2} dt \\ &= \int_1^3 \sqrt{\frac{1}{t^2} + \frac{1}{4} \left(1 - \frac{2}{t^2} + \frac{1}{t^4} \right)} dt = \int_1^3 \sqrt{\frac{1}{4} \left(1 + \frac{2}{t^2} + \frac{1}{t^4} \right)} dt \\ &= \int_1^3 \sqrt{\left(\frac{1}{2} \left(1 + \frac{1}{t^2} \right) \right)^2} dt = \int_1^3 \frac{1}{2} \left(1 + \frac{1}{t^2} \right) dt \\ &= \frac{1}{2} \left[t - \frac{1}{t} \right]_1^3 = \frac{4}{3} \quad \text{答} \end{aligned}$$

第5章 章末問題B

教 p.190

8. 次の不定積分を求めよ。

(1) $\int \frac{dx}{x^2(x+3)}$

(2) $\int \frac{dx}{\cos x}$

指針 不定積分の計算

(1) $\frac{1}{x^2(x+3)} = \frac{a}{x} + \frac{b}{x^2} + \frac{c}{x+3}$ の形に分解する。分母を払い、恒等式の性質を使って a, b, c の値を定める。

(2) $\frac{1}{\cos x} = \frac{\cos x}{\cos^2 x} = \frac{\cos x}{1-\sin^2 x}$ と変形し、 $(\sin x)' = \cos x$ を利用する。

解答 (1) $\frac{1}{x^2(x+3)} = \frac{a}{x} + \frac{b}{x^2} + \frac{c}{x+3}$ とおく。

← 部分分数に分解する。

分母を払って $1 = ax(x+3) + b(x+3) + cx^2$

整理すると $1 = (a+c)x^2 + (3a+b)x + 3b$

よって $a+c=0, 3a+b=0, 3b=1$

← 恒等式の性質

これを解くと $a = -\frac{1}{9}, b = \frac{1}{3}, c = \frac{1}{9}$

したがって

$$\begin{aligned} \int \frac{dx}{x^2(x+3)} &= \int \left\{ -\frac{1}{9x} + \frac{1}{3x^2} + \frac{1}{9(x+3)} \right\} dx \\ &= -\frac{1}{9} \log|x| - \frac{1}{3x} + \frac{1}{9} \log|x+3| + C \\ &= \frac{1}{9} \log \left| \frac{x+3}{x} \right| - \frac{1}{3x} + C \quad \text{答} \end{aligned}$$

(2) $\frac{1}{\cos x} = \frac{\cos x}{\cos^2 x} = \frac{\cos x}{1-\sin^2 x}$ と変形できる。

$\sin x = t$ とおくと $\cos x dx = dt$

よって $\int \frac{dx}{\cos x} = \int \frac{\cos x}{1-\sin^2 x} dx = \int \frac{dt}{1-t^2}$

$$= \int \left\{ -\frac{1}{(t+1)(t-1)} \right\} dt$$

← 部分分数に分解する。

$$= \frac{1}{2} \int \left(\frac{1}{t+1} - \frac{1}{t-1} \right) dt$$

$$= \frac{1}{2} (\log|t+1| - \log|t-1|) + C$$

$$= \frac{1}{2} \log \left| \frac{t+1}{t-1} \right| + C = \frac{1}{2} \log \left| \frac{\sin x + 1}{\sin x - 1} \right| + C$$

5章

積分法とその応用

$$= \frac{1}{2} \log \left| \frac{1+\sin x}{1-\sin x} \right| + C$$

$$= \frac{1}{2} \log \frac{1+\sin x}{1-\sin x} + C \quad \text{答}$$

$\frac{1+\sin x}{1-\sin x} > 0$ だから、
絶対値記号をはずして
いるよ。



教 p.190

9. a は定数とする。定積分 $I = \int_0^1 (e^x - ax)^2 dx$ を最小にする a の値と、 I の最小値を求めよ。

指針 定積分の最小値 定積分を求める。部分積分法も利用する。

I は a の 2 次関数になるから、平方完成してその最小値を求める。

解答
$$I = \int_0^1 (e^x - ax)^2 dx = \int_0^1 (e^{2x} - 2axe^x + a^2x^2) dx$$

$$= \int_0^1 e^{2x} dx - 2a \int_0^1 xe^x dx + a^2 \int_0^1 x^2 dx$$

ここで、 $\int_0^1 e^{2x} dx = \left[\frac{1}{2} e^{2x} \right]_0^1 = \frac{1}{2} (e^2 - 1)$

$$\int_0^1 xe^x dx = \int_0^1 x(e^x)' dx = \left[xe^x \right]_0^1 - \int_0^1 e^x dx$$

$$= e - \left[e^x \right]_0^1 = e - (e - 1) = 1$$

$$\int_0^1 x^2 dx = \left[\frac{x^3}{3} \right]_0^1 = \frac{1}{3}$$

であるから

$$I = \frac{1}{2} (e^2 - 1) - 2a \cdot 1 + a^2 \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{3} a^2 - 2a + \frac{1}{2} (e^2 - 1)$$

$$= \frac{1}{3} (a - 3)^2 + \frac{1}{2} (e^2 - 7)$$

よって、 I は $a = 3$ で最小値 $\frac{1}{2} (e^2 - 7)$ をとる。 **答**

10. 連続な関数 $f(x)$ について, $\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\sin x) dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\cos x) dx$ を証明せよ。

指針 定積分の等式の証明 $\sin x = \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$ と変形できる。 $\frac{\pi}{2} - x = t$ において置換積分法を利用し, 左辺から右辺を導く。

解答 左辺 $= \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\sin x) dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} f\left(\cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right)\right) dx$

$$\frac{\pi}{2} - x = t \text{ とおくと } x = \frac{\pi}{2} - t, \quad dx = (-1) dt$$

x と t の対応は右のようになるから

$$\begin{aligned} \int_0^{\frac{\pi}{2}} f\left(\cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right)\right) dx &= \int_{\frac{\pi}{2}}^0 f(\cos t) \cdot (-1) dt \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\cos t) dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\cos x) dx \end{aligned}$$

$$\text{よって } \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\sin x) dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\cos x) dx \quad \text{終}$$

x	$0 \rightarrow \frac{\pi}{2}$
t	$\frac{\pi}{2} \rightarrow 0$

11. a は正の定数とする。 $x > 0$ で定義された関数 $f(x)$ が等式

$$\int_a^{x^2} f(t) dt = \log x \text{ を満たすように, } f(x) \text{ と } a \text{ の値を定めよ。}$$

指針 定積分と導関数 a が定数のとき, $\frac{d}{dx} \int_a^x f(t) dt = f(x)$ である。これを導いた考え方を利用して, 等式の両辺をそれぞれ x で微分する。上端が x^2 であることに注意する。

解答 $F'(t) = f(t)$ とすると

$$\int_a^{x^2} f(t) dt = \left[F(t) \right]_a^{x^2} = F(x^2) - F(a)$$

$$\text{したがって, 与えられた等式から } F(x^2) - F(a) = \log x$$

$$\text{この両辺を } x \text{ で微分すると } 2xf(x^2) = \frac{1}{x}$$

$$\text{よって } f(x^2) = \frac{1}{2x^2} \quad \text{ゆえに } f(x) = \frac{1}{2x} \quad (x > 0) \quad \text{答}$$

また, 与えられた等式において, $x = \sqrt{a}$ を代入すると

$$\int_a^a f(t) dt = \log \sqrt{a}$$

$$\text{すなわち } 0 = \frac{1}{2} \log a \quad \text{したがって } a = 1 \quad \text{答}$$

12. 曲線 $y=e^x$ 上の点 $A(0, 1)$, 点 $B(1, e)$ における接線と, この曲線で囲まれた部分の面積 S を求めよ。

指針 曲線と接線で囲まれた部分の面積 まず, 点 A, B における接線の方程式を求める。曲線と2つの接線の上下関係に注意して定積分を計算する。

解答 $y'=e^x$ であるから, 点 $A(0, 1)$ における接線の方程式は

$$y-1=e^0(x-0)$$

$$\text{すなわち } y=x+1$$

点 $B(1, e)$ における接線の方程式は

$$y-e=e(x-1)$$

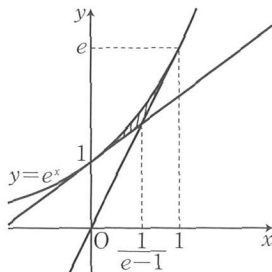
$$\text{すなわち } y=ex$$

2つの接線の交点の x 座標は

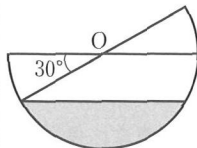
$$x+1=ex \text{ より } x=\frac{1}{e-1}$$

図より, 求める面積 S は

$$\begin{aligned} S &= \int_0^{\frac{1}{e-1}} \{e^x - (x+1)\} dx + \int_{\frac{1}{e-1}}^1 (e^x - ex) dx \\ &= \left[e^x - \frac{x^2}{2} - x \right]_0^{\frac{1}{e-1}} + \left[e^x - \frac{e}{2} x^2 \right]_{\frac{1}{e-1}}^1 \\ &= \left\{ e^{\frac{1}{e-1}} - \frac{1}{2(e-1)^2} - \frac{1}{e-1} - 1 \right\} + e - \frac{e}{2} - \left\{ e^{\frac{1}{e-1}} - \frac{e}{2(e-1)^2} \right\} \\ &= \frac{e-1}{2(e-1)^2} - \frac{1}{e-1} + \frac{e}{2} - 1 \\ &= \frac{e-2}{2} - \frac{1}{2(e-1)} \\ &= \frac{e^2-3e+1}{2(e-1)} \quad \text{答} \end{aligned}$$



13. 水を満たした半径 $2a$ cm の半球形の容器がある。
これを静かに 30° 傾けるととき, こぼれる水の量はどれだけか。



指針 容器とこぼれる水の量 次の図のように x 軸, y 軸をとるとき, $0 \leq x \leq a$ の範囲において, 半円 $y=\sqrt{(2a)^2-x^2}$ と x 軸および2直線 $x=0, x=a$ で囲まれた部分が x 軸の周りに1回転してできる回転体の体積として, こぼれる水の

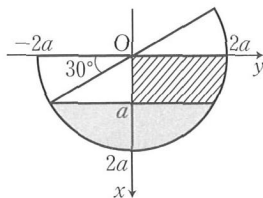
量を求める。

解答 図のように x 軸, y 軸をとり,
半円 $x^2 + y^2 = 4a^2$ ($x \geq 0$) を考える。

こぼれる水の量は, 右の図の斜線部分, つまり,
半円と x 軸および 2 直線 $x=0$, $x=a$ が囲む部分
が, x 軸の周りに 1 回転してできる立体の体積
として求めることができる。

よって

$$\begin{aligned}\pi \int_0^a y^2 dx &= \pi \int_0^a (4a^2 - x^2) dx \\ &= \pi \left[4a^2 x - \frac{x^3}{3} \right]_0^a = \frac{11}{3} \pi a^3 (\text{cm}^3) \quad \text{答}\end{aligned}$$



発展 微分方程式

まとめ

1 微分方程式

$\frac{dx}{dt} = a$ や $\frac{d^2y}{dt^2} = -g$ (a, g は定数) のように, 未知の関数の導関数を含む等式を 微分方程式 という。

2 微分方程式の解き方

微分方程式を満たす関数を, その微分方程式の 解 といい, すべての解を求めることを, その微分方程式を 解く という。

一般に $f(y) \frac{dy}{dx} = g(x)$

の形に変形できる微分方程式の解は, 次の等式から求めることができる。

$$\int f(y) dy = \int g(x) dx$$

注意 微分方程式を解くと, いくつかの任意の定数を含んだ解が得られる。
その定数に特定の値を与えれば, 解の 1 つが定まる。

練習

1

y を x の関数とする。微分方程式 $\frac{dy}{dx} = 2xy$ を解け。

教 p.192

指針 微分方程式 方程式を $f(y) \frac{dy}{dx} = g(x)$ の形に変形し, 両辺を x で積分する。左

辺は置換積分法の考え方により, $\int f(y) dy$ とすることができ, これは,

$\int f(y) \frac{dy}{dx} dx$ を形式的に約分して $\int f(y) dy$ になったとみると理解しやすい。

解に含まれる任意の定数は、整理してすっきりした形にしておく。

解答

$$\frac{dy}{dx} = 2xy$$

[1] 定数関数 $y=0$ は明らかに解である。

← $y=0$ の場合。

[2] $y \neq 0$ のとき、方程式を変形すると

$$\frac{1}{y} \cdot \frac{dy}{dx} = 2x$$

← $f(y) \frac{dy}{dx} = g(x)$ の

形を作る。

よって $\int \frac{1}{y} \cdot \frac{dy}{dx} dx = \int 2x dx$

← x で積分する。

左辺に置換積分法の公式を適用すると

$$\int \frac{1}{y} dy = \int 2x dx$$

← 形式的に dx で約分する。

ゆえに $\log|y| = x^2 + C$, C は任意の定数

← 積分を実行する。

$$|y| = e^{C+x^2}$$

← $|y| = e^{x^2+C}$

すなわち $y = \pm e^C e^{x^2}$

ここで、 $\pm e^C = A$ とおくと、 A は 0 以外の任意の値をとる。

← 定数を整理する。

[1]における $y=0$ は、 $y=Ae^{x^2}$ において、 $A=0$ とおくと得られる。

したがって、求める解は

$$y = Ae^{x^2}, A \text{ は任意の定数} \quad \square$$

練習 2

教 p.193

A を 0 でない任意の定数として、方程式 $xy=A$ の表す直角双曲線全体を考える。これらの直角双曲線のどれとも直交するような曲線の方程式を求めよ。ただし、2つの曲線が直交するとは、2つの曲線の交点におけるそれぞれの接線が垂直に交わることである。

指針 微分方程式と曲線の決定 曲線 $xy=A$ と求める曲線の交点 P の座標を (x, y) とし、 P におけるそれぞれの曲線の接線の傾きを x, y で表す。2つの曲線が直交する条件、すなわち接線の直交条件 (傾きの積が -1) から、微分方程式を作る。

解答

$$xy = A \quad \cdots \cdots \textcircled{1}$$

曲線 $\textcircled{1}$ と求める曲線 $\textcircled{2}$ の交点を $P(x, y)$ とする。

曲線 $\textcircled{1}$ の P における接線の傾きは

$\textcircled{1}$ の両辺を x で微分して $y + xy' = 0$

← 積 xy の微分

$$xy \neq 0 \text{ であるから } y' = -\frac{y}{x}$$

一方、曲線②のPにおける接線の傾きを $\frac{dy}{dx}$ とすれば、2つの曲線①、②が直交するとき

$$-\frac{y}{x} \cdot \frac{dy}{dx} = -1$$

← 傾きの積が^{*}-1

すなわち $y \frac{dy}{dx} = x$

← $f(y) \frac{dy}{dx} = g(x)$ の形を作る。

よって $\int y \frac{dy}{dx} dx = \int x dx$

← x で積分する。

左辺に置換積分法の公式を適用すると

$$\int y dy = \int x dx$$

← 形式的に dx で約分する。

ゆえに $\frac{1}{2} y^2 = \frac{1}{2} x^2 + C_1$, C_1 は任意の定数

← 積分を実行する。

すなわち $x^2 - y^2 = -2C_1$

$-2C_1 = C$ とおいて、求める曲線の方程式は

← 定数を整理する。

$$x^2 - y^2 = C, \quad C \text{ は任意の定数} \quad \square$$

5章

積分法とその応用

補足 ベクトル

本書の第4章「微分法の応用」の「平面上の点の運動」(157~159ページ)を学習するのに必要な数学Cの「ベクトル」の内容を補足として掲載した。

まとめ

1 有向線分とベクトル

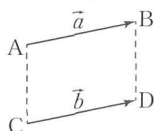
向きをつけた線分を **有向線分** ゆうこうぶん という。有向線分 $\overrightarrow{AB}$ では、 A をその **始点**、 B をその **終点** といい、その **向き** は A から B へ向かっているとする。また、線分 AB の長さを、有向線分 $\overrightarrow{AB}$ の **大きさ** または **長さ** という。有向線分の向きと大きさだけに着目したものを **ベクトル** という。ベクトルは、向きと大きさをもつ量である。



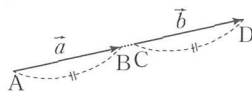
2 ベクトルの表記

① **ベクトル** 有向線分 $\overrightarrow{AB}$ が表すベクトルを $\overrightarrow{AB}$ で表す。また、ベクトルを $\vec{a}$, $\vec{b}$ などで表すこともある。

② **ベクトルの大きさ** ベクトル $\overrightarrow{AB}$, $\vec{a}$ の大きさは、それぞれ $|\overrightarrow{AB}|$, $|\vec{a}|$ で表し、 $|\overrightarrow{AB}|$ は有向線分 $\overrightarrow{AB}$ の長さに等しい。



③ **等しいベクトル** 向きが同じで大きさも等しい2つのベクトル $\vec{a}$, $\vec{b}$ は **等しい** といい、 $\vec{a} = \vec{b}$ と書く。 $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$ のとき、

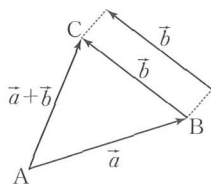


有向線分 $\overrightarrow{AB}$ を平行移動して有向線分 $\overrightarrow{CD}$ に重ね合わせることができる。

④ **零ベクトル** 大きさが0のベクトルを **零ベクトル** または **ゼロベクトル** といい、 $\vec{0}$ で表す。零ベクトルの向きは考えない。

3 ベクトルの和

ベクトル $\vec{a} = \overrightarrow{AB}$ とベクトル $\vec{b}$ に対して、 $\overrightarrow{BC} = \vec{b}$ となるように点 C をとる。このようにして定まるベクトル $\overrightarrow{AC}$ を、 $\vec{a}$ と $\vec{b}$ の **和** といい、 $\vec{a} + \vec{b}$ と書く。



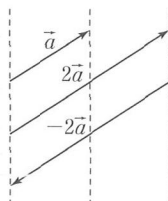
4 ベクトルの実数倍

実数 k とベクトル $\vec{a}$ に対して、 $\vec{a}$ の k 倍のベクトル $k\vec{a}$ を次のように定める。

$\vec{a} \neq \vec{0}$ のとき

[1] $k > 0$ ならば、 $\vec{a}$ と向きが同じで、大きさが k 倍のベクトル。とくに $1\vec{a} = \vec{a}$

[2] $k < 0$ ならば、 $\vec{a}$ と向きが反対で、大きさが $|k|$ 倍のベクトル。とくに $(-1)\vec{a} = -\vec{a}$



[3] $k=0$ ならば, $\vec{0}$ とする。すなわち $0\vec{a}=\vec{0}$
 $\vec{a}=\vec{0}$ のとき どんな k に対しても $k\vec{0}=\vec{0}$ とする。

注意 $(-2)\vec{a}=-2\vec{a}$ が成り立つので, これらを単に $-2\vec{a}$ と書く。

5 ベクトルの平行

$\vec{0}$ でない 2 つのベクトル $\vec{a}$, $\vec{b}$ は, 向きが同じか反対のとき, 平行 である
 といひ, $\vec{a} \parallel \vec{b}$ と書く。このとき, 次のことが成り立つ。

$\vec{a} \neq \vec{0}$, $\vec{b} \neq \vec{0}$ のとき, $\vec{a} \parallel \vec{b} \iff \vec{b}=k\vec{a}$ となる実数 k がある

6 ベクトルの成分表示

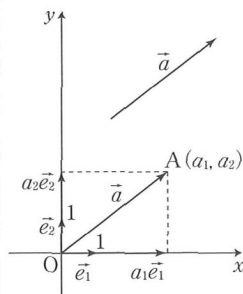
O を原点とする座標平面上において, x 軸, y 軸の正の向きと同じ向きで大きさが 1 のベクトルを 基本ベクトル といひ, それぞれ $\vec{e}_1$, $\vec{e}_2$ で表す。

座標平面上のベクトル $\vec{a}$ に対し, $\vec{a}=\overrightarrow{OA}$ である点 A の座標が (a_1, a_2) のとき, $\vec{a}$ は
 $\vec{a}=a_1\vec{e}_1+a_2\vec{e}_2$ と表される。この $\vec{a}$ を
 $\vec{a}=(a_1, a_2)$ ……①とも書く。

①における a_1, a_2 をそれぞれ $\vec{a}$ の x 成分, y 成分 といひ, まとめて $\vec{a}$ の 成分 という。

また, ①を $\vec{a}$ の 成分表示 という。

なお, $\vec{a}=(a_1, a_2)$ のとき $|\vec{a}|=\sqrt{a_1^2+a_2^2}$



7 ベクトルの内積

$\vec{0}$ でない 2 つのベクトル $\vec{a}$, $\vec{b}$ について, 1 点 O を定め,
 $\vec{a}=\overrightarrow{OA}$, $\vec{b}=\overrightarrow{OB}$ となる点 A , B をとる。このよう
 にして定まる $\angle AOB$ の大きさ θ を, $\vec{a}$ と $\vec{b}$ の なす
 角 といひ, ただし, $0^\circ \leq \theta \leq 180^\circ$ である。

$\vec{0}$ でない 2 つのベクトル $\vec{a}$, $\vec{b}$ のなす角を θ とする
 とき, $|\vec{a}||\vec{b}|\cos\theta$ を $\vec{a}$ と $\vec{b}$ の 内積 といひ, $\vec{a} \cdot \vec{b}$ で表す。

$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}||\vec{b}|\cos\theta$ ただし, θ は $\vec{a}$ と $\vec{b}$ のなす角
 $\vec{a}=\vec{0}$ または $\vec{b}=\vec{0}$ のときは, $\vec{a}$ と $\vec{b}$ の内積を $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$ と定める。また,
 $\theta=90^\circ$ のとき, $\vec{a}$ と $\vec{b}$ は 垂直 であるといひ, $\vec{a} \perp \vec{b}$ と書く。

ベクトルの内積は, その成分を用いて次のように表される。

$\vec{a}=(a_1, a_2)$, $\vec{b}=(b_1, b_2)$ のとき $\vec{a} \cdot \vec{b} = a_1b_1 + a_2b_2$

また, ベクトルの垂直条件は次のようになる。

$\vec{0}$ でない 2 つのベクトル $\vec{a}=(a_1, a_2)$, $\vec{b}=(b_1, b_2)$ について
 $\vec{a} \perp \vec{b} \iff a_1b_1 + a_2b_2 = 0$

